ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК

Л. Д. Кудрявцев

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3

ДРОФА

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первой половине третьего тома «Математического анализа» рассматривается теория тригонометрических рядов Фурье: сначала изучается их поточечная сходимость и сходимость в среднем, а затем классическая теория преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций. Изложена также теория интегралов, зависящих от параметра (собственных и несобственных), и рассматривается вопрос о вычислении определенных интегралов с помощью дифференцирования и интегрирования интегралов по параметру.

Во второй половине этого тома изучаются некоторые вопросы теории метрических, нормированных, гильбертовых пространств и пространств обобщенных функций, идейно связанные с задачами классического анализа. Установлен, в частности, ряд свойств отображений метрических пространств, обобщающих свойства числовых функций, получена формула Тейлора для отображений нормированных пространств, изложены основы теории разложений элементов гильбертовых пространств в ряды Фурье по ортогональным системам и дана теория преобразования Фурье обобщенных функций.

В конце тома имеется «Дополнение», посвященное некоторым вопросам численных методов анализа (приближенное вычисление значений функции, ее производной и интеграла от нее, приближенное решение уравнений) и теория предела отображения по фильтру, которая включает в себя как частный случай пределы, изучавшиеся ранее.

Нумерация глав и параграфов продолжает нумерацию первых двух томов курса.

Глава 7

Ряды Фурье. Интеграл Фурье

§ 55

Тригонометрические ряды Фурье

55.1. Определение ряда Фурье. Постановка основных задач

Определение 1. *Ряд вида*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{55.1}$$

называется тригонометрическим рядом.

Его частичные суммы являются линейными комбинациями функций, входящих в систему

$$\cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx \dots . \tag{55.2}$$

Простые примеры сходящихся тригонометрических рядов дают ранее рассмотренные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1 - r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos n\varphi + r^2},$$

$$0 \leqslant r < 1, \quad -\infty < \varphi < +\infty$$

(см. пример 6 в п. 36.3).

Определение 2. *Множество функций* (55.2) *называется тригонометрической системой.*

ЛЕММА 1. *Тригонометрическая система* (55.2) *обладает следующими свойствами*:

1^0. *Интеграл по отрезку* $[-\pi, \pi]$ *от произведения двух различных функций, входящих в нее, равен нулю* (*это свойство называется ортогональностью** *системы* (55.2)), *т. е.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, \quad n \neq m. \qquad (55.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, \quad m, n = 0, 1, \ldots;$$

2^0. $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (55.4)$$

Доказательство. При любых целых неотрицательных m, n таких, что $m \neq n$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n - m)x - \cos (n + m)x] dx =$$

$$= \left.\frac{\sin (n - n)x}{2(n - m)}\right|_{-\pi}^{\pi} - \left.\frac{\sin (n + n)x}{2(n + m)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Аналогично доказываются и два других равенства (55.3).

Докажем теперь свойство (55.4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi. \ \square$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (55.5)$$

и ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \ n = 1, 2, \ldots . \qquad (55.6)$$

* Происхождение термина «ортогональность» будет разъяснено в п. 58.1.

Доказательство. Поскольку ряд, стоящий в правой части равенства (55.5), сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, а все его члены являются непрерывными на этом отрезке функциями, то и его сумма $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, а сам ряд можно почленно интегрировать (см. п. 32.4) от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = \pi a_0.$$

Отсюда следует первая из формул (55.6).

Если ряд (55.5) почленно помножить на $\cos nx$ и $\sin nx$ ($n = 1, 2, \ldots$), то полученные ряды будут также равномерно сходиться на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. свойство 2^0 в п. 32.3). Интегрируя почленно эти ряды и используя свойство ортогональности (55.3) тригонометрической системы и равенства (55.4), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nxdx = \pi a_n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nxdx = \pi b_n.$$

Из полученных соотношений непосредственно вытекают остальные формулы (55.6). □

Теперь заметим, что интегралы (55.6) имеют смысл не только для функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$, а также, например, и для функций, интегралы от которых абсолютно сходятся на этом отрезке.

Напомним, что понятие абсолютно сходящегося интеграла (как и просто сходящегося интеграла) было введено для функций, определенных на некотором промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, для которых существует такое конечное множество точек x_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$, расширенной числовой прямой $\overline{\boldsymbol{R}}$ (см. п. 3.1), что функция интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta]$, лежащем в заданном промежутке и не содержащем ни одной из точек $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Всякое конечное множество точек x_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, обладающее указанными выше свойствами, будем называть *правильным разбиением* промежутка интегрирования функции f. Очевидно, что если к правильному разбиению рассматриваемо-

го промежутка добавить любое конечное множество точек этого промежутка и расположить точки получившегося множества в порядке возрастания, то получится снова правильное разбиение.

Если все интегралы $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$, $i = 1, 2, \ldots, k$, сходятся, то можно определить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Он определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

и называется *сходящимся интегралом*.

Отметим, что значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ не зависит от выбора правильного разбиения промежутка интегрирования.

Если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ также сходится и называется *абсолютно сходящимся* (см. п. 33.5), а функция f — *абсолютно интегрируемой* на рассматриваемом промежутке.

Отметим, что если функция интегрируема по Риману на некотором отрезке, то ее абсолютная величина также интегрируема по Риману на нем (см. п. 28.1) и, следовательно, функция, интегрируемая по Риману на отрезке, абсолютно интегрируема на нем.

Если интеграл от функции f абсолютно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, то для нее все интегралы (55.6) также сходятся, так как они представляют собой интегралы от произведения абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ на непрерывную (синус или косинус), а такие интегралы абсолютно сходятся (см. лемму 2 в п. 29.5).

Определение 3. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке* $[-\pi, \pi]$. *Тригонометрический ряд* (55.1), *коэффициенты которого задаются формулами* (55.6), *называется рядом Фурье** *или*, *более подробно*, *тригонометрическим рядом Фурье*, *а числа a_n и b_n — коэффициентами Фурье функции f*.

* Ж. Фурье (1768—1830) — французский физик и математик.

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Частичные суммы порядка n этого ряда будем обозначать через $S_n(x; f)$ или, короче, $S_n(x)$ и называть *суммами Фурье порядка n функции f*.

Подчеркнем, что здесь знак ~ обозначает не асимптотическое равенство, а просто соответствие: функции сопоставляется ее ряд Фурье.

Теорему 1 в этих терминах можно перефразировать следующим образом:

всякий равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда если функция f — четная, то $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, если же f — нечетная функция, то $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

2. Является ли тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ рядом Фурье?

В этом параграфе будут изучаться периодические функции f, для каждой из которых существует число $T > 0$ такое, что при всех x, принадлежащих области определения функции f, значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

Такие функции называются T-периодическими.

Пусть f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и, следовательно, ей можно сопоставить ряд Фурье. Если он сходится на некотором множестве, то сходится к 2π-периодической функции, так как все его члены 2π-периодичны. Поэтому бывает удобно и саму функцию f «периодически продолжить» с периодом 2π. Кавычки поставлены потому, что в действительности функцию f можно продолжить периодически только в случае, когда $f(-\pi) = f(\pi)$.

Если это условие не выполнено, то *продолжением функции f* назовем 2π-периодическую функцию $\tilde{f}$, которую получим, полагая для любой точки $x \in [-\pi, \pi)$, в которой определена функция f (напомним, что, в силу абсолютной интегрируемос-

ти функции на отрезке $[-\pi, \pi]$, она определена во всех его точках, кроме, быть может, конечного их множества);

$$\overline{f}(x + 2\pi k) = f(x),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Такое продолжение в случае, когда $f(-\pi) \neq f(\pi)$, приводит к несовпадению значений функций f и $\overline{f}$ при $x = \pi$. Однако, поскольку коэффициенты Фурье функции определяются с помощью интегралов (55.6), это не приведет к их изменению и, следовательно, ряды Фурье данной функции f и продолженной $\overline{f}$ совпадают.

Отметим, что при указанном периодическом продолжении функция $\overline{f}$ может не быть непрерывной в точках $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, даже если функция f непрерывна при $x = -\pi$ и $x = \pi$. Продолженная функция $\overline{f}$ будет непрерывной в точках $2\pi k$, если f непрерывна в $x = -\pi$ и $x = \pi$, причем $f(-\pi) = f(\pi)$. Непрерывность в других точках при периодическом продолжении сохраняется: если функция f непрерывна в точке $x \in (-\pi, \pi)$, то она непрерывна в любой точке $x + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Часто продолженную функцию $\overline{f}$ будем обозначать тем же символом f, что и продолжаемую.

Если функция f 2π-периодична, то при вычислении ее коэффициентов Фурье (см. (55.6)) интегрирование можно выполнять по любому отрезку длины 2π, например по отрезку $[0, 2\pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Действительно, если какая-либо функция φ имеет период, равный T, и для некоторого числа $a \in \boldsymbol{R}$ интегрируема на отрезке $[a, a + T]$, то при любом выборе $b \in \boldsymbol{R}$ она интегрируема и на отрезке $[b, b + T]$, причем

$$\int_b^{b+T} \varphi(x)dx = \int_a^{a+T} \varphi(x)dx,$$

т. е. интеграл $\int_a^{a+T} \varphi(x)dx$ не зависит от выбора числа $a \in \boldsymbol{R}$.

В § 60 мы обобщим понятие тригонометрического ряда Фурье, а именно: определим и изучим ряды Фурье по произвольной ортогональной системе функций. В настоящем же параграфе будем изучать лишь тригонометрические ряды Фурье

абсолютно интегрируемых функций (см. также п. 60.6). Прежде всего будет рассматриваться вопрос об условиях, гарантирующих сходимость ряда Фурье. В случае же сходимости ряда Фурье данной функции $f(x)$ при определенных условиях мы выясним, чему равна его сумма $S(x)$, в частности, когда она совпадает с функцией $f(x)$. Будет изучаться «скорость» сходимости рядов Фурье и условия, от которых она зависит. Будет показано, что и в том случае, когда ряд Фурье непрерывной функции расходится в некоторых точках (примеры таких рядов существуют), по нему можно восстановить саму функцию во всех точках. Мы увидим, наконец, что с определенной точки зрения сходимость рядов Фурье естественно рассматривать не только в обычном смысле (как сходимость последовательности частичных сумм в точке или равномерную сходимость), но и совершенно по-другому, а именно, в смысле среднего квадратичного (см. пп. 55.8 и 55.9).

55.2. Стремление коэффициентов Фурье к нулю

Большую роль в теории тригонометрических рядов играет тот факт, что коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \to \infty$. Он вытекает из доказываемого ниже несколько более общего утверждения, часто применяемого в исследованиях, относящихся к рядам Фурье и смежным вопросам.

ТЕОРЕМА 2 (теорема Римана). *Если функция f абсолютно интегрируема на промежутке (a, b), конечном или бесконечном, то*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x dx = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Коэффициенты Фурье (55.6) абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \to \infty$.*

Прежде чем доказывать эти утверждения, введем ряд понятий, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

Определение 4. *Для всякой функции f, определенной на всей числовой оси, замыкание множества точек x, в которых $f(x) \neq 0$, называется ее носителем и обозначается через* $\operatorname{supp} f$*.

---

* От лат. supportus — опора.

Определение 5. *Функция f, определенная на всей числовой оси, называется финитной, если ее носитель содержится в некотором конечном отрезке.*

Определение 6. *Для всякого множества E, лежащего на числовой прямой, функция*

$$\chi(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in E, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin E, \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

На рисунке 1 изображена характеристическая функция интервала вида $[a, b)$.

Определение 7. *Функция f, определенная на всей числовой оси, называется финитной ступенчатой функцией, если она является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций попарно не пересекающихся полуинтервалов* $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *т. е. если она представлена в виде*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_i(x) \tag{55.7}$$

(рис. 2), *где* $\chi_i(x)$ — *характеристическая функция интервала* $[a_i, b_i)$, *а* λ_i, $i = 1, \ldots, m$, — *некоторые действительные числа.*

Нетрудно убедиться, что если не требовать, чтобы полуинтервалы $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, попарно не пересекались, то получится равносильное определение. Это следует из того, что пересечение конечного числа рассматриваемых ограниченных полуинтервалов является также полуинтервалом того же вида.

Очевидно, всякая функция вида (55.7) финитна.

Финитная ступенчатая функция интегрируема на всей числовой оси, при этом если она задана формулой (55.7), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_i(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{a_i}^{b_i} dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b_i - a_i).$$

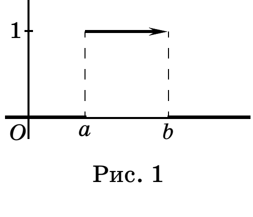


Рис. 1

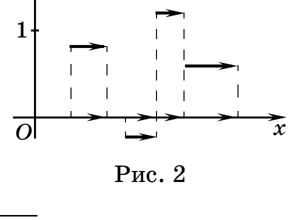


Рис. 2

УПРАЖНЕНИЕ 3. Доказать, что всякая непрерывная на отрезке функция является пределом равномерно сходящейся последовательности финитных ступенчатых функций, носители которых принадлежат тому же отрезку.

ЛЕММА 2. *Для любой функции f, абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, существует последовательность таких финитных ступенчатых функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, что*:

1^0. $\operatorname{supp} \varphi_n \subset (a, b)$;

2^0. $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|dx = 0.$

Доказательство. Пусть функция f абсолютно интегрируема на промежутке с концами a и b. Допустим для определенности, что она интегрируема на любом отрезке

$$[\xi, \eta], \quad -\infty \leqslant a < \xi < \eta < b \leqslant +\infty$$

(общий случай абсолютно интегрируемой функции, см. п. 55.1, легко сводится к этому). Тогда, согласно определению несобственного интеграла, для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ существуют такие числа ξ и η, что

$$\int\limits_a^\xi |f(x)|dx + \int\limits_\eta^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{55.8}$$

Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[\xi, \eta]$ и, следовательно, если обозначить через s_τ нижнюю сумму Дарбу функции f, соответствующую разбиению τ отрезка $[\xi, \eta]$, то

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \int\limits_\xi^\eta f(x)dx,$$

где $|\tau|$ — мелкость разбиения τ. Поэтому существует разбиение $\tau_0 = \{x_i\}_{i=1}^{l=k}$ отрезка $[\xi, \eta]$ такое, что если s_{τ_0} — нижняя сумма Дарбу для функции f, соответствующая разбиению τ_0, т. е.

$$s_{\tau_0} = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \; \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots, k,$$

то

$$0 \leqslant \int\limits_\xi^\eta f(x)dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

где ε — фиксированное выше число.

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если} \quad x_{i-1} \leqslant x < x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\ 0, & \text{если} \quad x < \xi \quad \text{или} \quad x \geqslant \eta. \end{cases} \tag{55.9}$$

Очевидно, $\varphi(x)$ — финитная ступенчатая функция,

$$\operatorname{supp} \varphi \subset [\xi, \eta] \subset (a, b) \text{ и } \int_\xi^\eta \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = s_{\tau_0}.$$

Следовательно,

$$\int_\xi^\eta [f(x) - \varphi(x)]dx = \int_\xi^\eta f(x)dx - \int_\xi^\eta \varphi(x)dx =$$

$$= \int_\xi^\eta f(x)dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{55.10}$$

при этом, так как $\varphi(x) \leqslant f(x)$, $\xi \leqslant x < \eta$, то

$$f(x) - \varphi(x) = |f(x) - \varphi(x)| \geqslant 0.$$

Из неравенств (55.8) и (55.10) имеем

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx =$$

$$= \int_a^\xi |f(x)|dx + \int_\xi^\eta [f(x) - \varphi(x)]dx + \int_\eta^b |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Полагая, например, $\varepsilon = 1/n$ и обозначая соответствующие финитные ступенчатые функции φ через φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, получим последовательность финитных ступенчатых функций φ_n, для которой выполняется утверждение леммы. □

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что из определения ступенчатой функции φ, построенной при доказательстве теоремы 2 (см. (55.9)), следует, что если для всех $x \in [\xi, \eta]$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c,$$

то для всех $x \in [\xi, \eta]$ выполняется и неравенство $|\varphi(x)| \leqslant c$.

Действительно, если $-c \leqslant f(x) \leqslant c$, то для любой точки $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, имеем

$$-c \leqslant m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \leqslant c.$$

Поэтому (см. (55.9)) для всех $x \in [x_{i-1}, x_i)$ выполняется неравенство $-c \leqslant \varphi(x) \leqslant c$, т. е. $|\varphi(x)| \leqslant c$ на всех полуинтервалах $[x_{i-1}, x_i)$, а следовательно, и на отрезке $[\xi, \eta]$ (заметим, что $\varphi(\eta) = 0$).

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что из условия $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$ следует, что функция f равна нулю в некоторых окрестностях точек a и b. Действительно, носитель $\operatorname{supp} f$ функции f является, согласно определению, замкнутым множеством, и так как точки a и b ему не принадлежат, то они не являются его точками прикосновения. Поэтому у них существуют окрестности, не содержащие точек множества $\operatorname{supp} f$, и во всех точках этих окрестностей функция f равна, очевидно, нулю.

Доказательство теоремы. Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция полуинтервала $[\xi, \eta)$. Тогда для любого интервала $(a, b) \supset [\xi, \eta]$ будем иметь

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b \chi(x) \sin \nu x dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_\xi^\eta \sin \nu x dx = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} = 0,$$

так как

$$\left| \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} \right| \leqslant \frac{|\cos \nu\xi| + |\cos \nu\eta|}{|\nu|} \leqslant \frac{2}{|\nu|} \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Любая финитная ступенчатая функция является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций полуинтервалов рассмотренного вида, поэтому утверждение теоремы справедливо и для любой финитной ступенчатой функции.

Если теперь функция f является абсолютно интегрируемой на промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то для любого числа $\varepsilon > 0$, согласно лемме, существует финитная ступенчатая функция φ такая, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для этой ступенчатой функции (поскольку для ступенчатых функций теорема уже доказана) существует такое ν_ε, что при $|\nu| > \nu_\varepsilon$

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, используя тождество $f(x) = [f(x) - \varphi(x)] + \varphi(x)$, при $|\nu| > \nu_\varepsilon$ получим

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \nu x dx \right| \leqslant \left| \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] \sin \nu x dx \right| +$$

$$+ \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x dx = 0$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x dx = 0$. □

Отметим, что рассматриваемые в теореме 2 пределы дают примеры тех случаев, когда пределы от интегралов не равняются интегралам от пределов подынтегральных функций. Так, например, в случае функции $f(x)$, равной постоянной, не равной нулю, и конечного промежутка (a, b) подынтегральные выражения в интегралах $\int_a^b f(x) \sin \nu x dx$ и $\int_a^b f(x) \cos \nu x dx$ вообще не имеют пределов при $\nu \to \infty$, а пределы интегралов, как это доказано выше, существуют.

55.3. Интеграл Дирихле. Принцип локализации

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Найдем удобное для исследований выражение частичной суммы $S_n(x; f)$ ряда Фурье функции f, называемой также просто *суммой Фурье n-го порядка*, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *этой функции*. Подставив в $S_n(x; f)$ выражения для коэффициентов Фурье (55.6), получим

$$S_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x)\right]dt. \qquad (55.11)$$

Положим

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt,\ n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad (55.12)$$

тогда формулу (55.11) можно переписать в виде

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t - x)f(t)dt. \qquad (55.13)$$

Функция $D_n(t)$ называется *ядром Дирихле*, а интеграл, стоящий в правой части равенства (55.13), — *интегралом Дирихле*.

ЛЕММА 3. *Ядро Дирихле*:

1^0. *Четная непрерывная* 2π-*периодическая функция, причем*

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2}.$$

2^0. *Удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1; \qquad (55.14)$$

3^0. *При* $t \neq 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + 1/2)t}{2\sin(t/2)}, \; n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (55.15)$$

Доказательство. Непрерывность, четность и существование периода, равного 2π, для ядра Дирихле $D_n(t)$ непосредственно следует из его определения, т. е. из формулы (55.12). Из этой же формулы следует и равенство (55.14): чтобы его получить, достаточно проинтегрировать по отрезку $[-\pi, \pi]$ обе части равенства (55.12):

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt = \pi,$$

так как при $k = 1, 2, \ldots$ имеем $\int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt = 0$.

Докажем теперь формулу (55.15). Имеем

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2\sin(t/2)}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin(t/2)}\left[\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}\,t - \sin\frac{2k-1}{2}\,t\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}, \quad t \neq 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

По существу, эта формула была уже доказана (см. формулу (30.89) во втором томе). □

Мы воспроизвели здесь доказательство лишь для удобства читателя. Отметим, что, в силу четности ядра Дирихле,

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \int_{0}^{\pi} D_n(t)dt,$$

поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 2\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt.$$

Отсюда и из свойства 2^0 ядра Дирихле следует, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt = 1. \qquad (55.16)$$

Заметим еще, что правая часть равенства (55.15) имеет смысл лишь при $t \neq 2\pi k$, k — целое. Но так как

$$\lim_{t \to 2k\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} = \lim_{t \to 2k\pi} D_n(t) = n + 1/2,$$

то функцию $\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}$ можно доопределить при $t = 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$, считая ее значение в каждой из этих точек по определению равным $n + 1/2$. Доопределенная указанным способом функция непрерывна при $t = 2\pi k$ для всех целых k.

Вернемся к рассмотрению функции f, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Нас будет интересовать, в частности, предел последовательности частичных сумм $S_n(x; f)$ ее ряда Фурье. Заметим, что непосредственно перейти к пределу при $n \to \infty$ в правой части равенства (55.13), т. е. перейти к пределу под знаком интеграла, нельзя, так как предел ядра Дирихле при $n \to \infty$ не существует. Продолжим функцию f с полуинтервала $[-\pi, \pi)$ в 2π-периодическую функцию и обозначим ее также через f (подробнее о периодическом продолжении см. в п. 55.1).

Периодическую с периодом 2π функцию, абсолютно интегрируемую на отрезке $[-\pi, \pi]$, будем называть для краткости 2π-*периодической абсолютно интегрируемой* (на периоде) функцией.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Для частичной суммы Фурье $S_n(x; f)$ 2π-периодической абсолютно интегрируемой функции f справедливы формулы*

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)dt \tag{55.17}$$

и

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt. \tag{55.18}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Для любых $\delta \in (0, \pi)$ и $x \in [-\pi, \pi]$ частичная сумма $S_n(x; f)$ ряда Фурье 2π-периодической абсолютно интегрируемой функции f обладает следующим асимптотическим интегральным представлением*:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt + o(1), \quad n \to \infty. \tag{55.19}$$

Доказательство леммы. Выполним в интеграле Дирихле (55.13) замену переменной интегрирования $u = t - x$:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u)f(x+u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du. \tag{55.20}$$

Мы снова воспользовались здесь тем обстоятельством, что интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна ее периоду, не зависит от положения этого отрезка на действительной оси (см. п. 55.1), и применили это свойство к 2π-периодической по u функции $D_n(u)f(x+u)$. Итак, формула (55.17) доказана.

Для доказательства формулы (55.18) представим правую часть равенства (55.20) в виде суммы двух интегралов с промежутками интегрирования $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$; в первом интеграле выполним замену переменной $u = -t$ и воспользуемся четностью ядра Дирихле: $D_n(-u) = D_n(u)$ (см. лемму 3). В результате будем иметь

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)f(x-t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt.$$

Формула (55.18) также доказана. □

Доказательство следствия. Зафиксируем число δ, $0 < \delta < \pi$, и представим правую часть (55.18) в виде суммы двух интегралов следующим образом:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}. \tag{55.21}$$

Поскольку функция $\frac{1}{2\sin(t/2)}$ непрерывна, следовательно, и ограничена на отрезке $[\delta, \pi]$ $\left(\text{именно, для всех } t \in [\delta, \pi]: 0 < \frac{1}{2\sin(t/2)} \leqslant \frac{1}{2\sin(\delta/2)}\right)$, а функция $f(x+t) + f(x-t)$ при любом фиксированном $x \in [-\pi, \pi]$ 2π-периодична по t и абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то на $[\delta, \pi]$ абсолютно интегрируемо и их произведение $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)}$. Поэтому, согласно теореме Римана (см. теорему 2 в п. 55.2), второй интеграл в правой части равенства (55.21) стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = o(1), \quad n \to \infty.$$

Подставляя это выражение в (55.21), получим формулу (55.19). □

Отметим, что в формуле (55.19) бесконечно малая $o(1)$ зависит от числа δ и от точки x.

Из формулы (55.19) следует одно важное свойство рядов Фурье, называемое принципом локализации. Сформулируем его в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3 (принцип локализации). *Если f — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая функция, то существование и значение предела последовательности ее частичных сумм Фурье $S_n(x; f)$ в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ зависит только от существования и значения предела при $n \to \infty$ интеграла*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)[f(x_0+t)+(x_0-t)dt,$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Подчеркнем, что в подынтегральное выражение интеграла входят лишь значения функции f на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ и тем самым существование и значение предела частичных сумм ряда Фурье функции f зависит только от ее свойств в окрестности точки x_0, или, как говорят, от ее локальных свойств вблизи точки x_0.

Из принципа локализации следует, что если в любой, сколь угодно малой окрестности точки x_0 функции f и g совпадают, то пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0;\ f)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0;\ g)$ одновременно существуют или нет, причем если пределы существуют, то они равны. Это тем более интересно, что ряды Фурье таких функций, вообще говоря, различны, ибо в формулы для коэффициентов Фурье входят значения функции по всему отрезку $[-\pi, \pi]$.

55.4. Сходимость рядов Фурье в точке

Далее понадобится следующая простая лемма.

ЛЕММА 5. *Для 2π-периодической абсолютно интегрируемой на отрезке длины 2π функции f интегралы*

$$\int_0^{\delta}\frac{|f(t)|}{t}dt,\ 0<\delta\leqslant\pi,\quad \text{и}\quad \int_0^{\pi}\frac{|f(t)|}{2\sin(t/2)}dt \qquad (55.22)$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Действительно, для любого δ, $0<\delta<\pi$, функция $\dfrac{1}{2\sin(t/2)}$ непрерывна, а поэтому и интегрируема по

Риману на отрезке $[\delta, \pi]$. Функция же $f(t)$ абсолютно интегрируема на этом отрезке, следовательно, и их произведение $\frac{f(t)}{2\sin(t/2)}$ абсолютно интегрируемо на отрезке $[\delta, \pi]$, т. е. при любом δ, $0 < \delta < \pi$, интеграл

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{|f(t)|}{2\sin(t/2)}\,dt \tag{55.23}$$

сходится (см. лемму 2 в п. 33.5).

Выберем теперь $\delta > 0$ так, чтобы существовало правильное разбиение (см. п. 55.1) отрезка $[0, \pi]$, для которого отрезок $[0, \delta]$ не содержал бы ни одной точки этого разбиения, кроме, быть может, точки $t = 0$. Возможность этого следует из самого определения абсолютной интегрируемости функции на отрезке (см. п. 55.1). В этом случае для любого ε такого, что $0 < \varepsilon < \delta$, функция f будет интегрируема по Риману на отрезке $[\varepsilon, \delta]$, а следовательно, интегрируемы по Риману на этом отрезке и функции $\frac{f(t)}{t}$, $\frac{f(t)}{2\sin(t/2)}$. Кроме того, эти функции эквивалентны при $t \to 0$, так как $\lim\limits_{t \to 0} \frac{2\sin(t/2)}{t} = 1$; поэтому по признаку сходимости интегралов, называемому признаком сравнения (см. следствие из теоремы 1 в п. 29.3), примененному к абсолютным величинам рассматриваемых функций, интегралы $\int_0^{\delta} \frac{|f(t)|}{t}\,dt$, $\int_0^{\delta} \frac{|f(t)|}{2\sin(t/2)}\,dt$ одновременно сходятся или расходятся. В силу сходимости интеграла (55.23), отсюда сразу следует, что интегралы (55.22) также будут одновременно сходиться или расходиться. □

В дальнейшем в этом пункте будут рассматриваться 2π-периодические абсолютно интегрируемые на отрезке длины 2π функции, которые имеют только точки разрыва первого рода, вследствие чего в каждой точке x_0 числовой оси существуют односторонние пределы:

$$\lim_{h \to +0} f(x_0 + h) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{h \to +0} f(x_0 - h) = f(x_0 - 0).$$

Определение 8 (Лебег). *Точка x_0 называется регулярной точкой функции f, если*

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Очевидно, каждая точка непрерывности функции является ее регулярной точкой.

Если x_0 — точка разрыва первого рода функции f, то под ее односторонними производными $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ будем здесь понимать пределы

$$f'_+(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}, \quad f'_-(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h}.$$

В том случае, когда функция непрерывна в точке x и, следовательно, $f(x + 0) = f(x - 0) = f(x)$, сформулированное определение односторонних производных совпадает с данным раньше (см. п. 9.1).

Для удобства формулировки теоремы о сходимости ряда Фурье введем обозначение

$$f_x^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0). \quad (55.24)$$

Очевидно, что в регулярной точке x функция $f_x^*(t)$ имеет вид

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Ясно также, что если функция f 2π-периодична и абсолютно интегрируема на периоде, то и функция $f_x^*(t)$ (x фиксировано) также является 2π-периодической и абсолютно интегрируемой на периоде функцией.

Заметим, что если функция 2π-периодична и абсолютно интегрируема на периоде, то сходимость интеграла $\int\limits_0^\delta \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ при некотором $\delta > 0$ равносильна его сходимости при любом конечном $\delta > 0$, так как, в силу периодичности и абсолютной интегрируемости функции f на периоде, при любом $\delta_1 > 0$ интеграл $\int\limits_{\delta_1}^\delta \frac{|f(t)|}{t}\,dt$, $0 < \delta_1 < \delta$, сходится.

ТЕОРЕМА 4 (признак Дини). *Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая ни отрезке длины 2π.*

Тогда если x является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода функции f и при некотором δ, $0 < \delta < \pi$, интеграл

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt \quad (55.25)$$

сходится, то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (55.26)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если условия теоремы выполнены, то в любой регулярной точке функции f (в частности, во всех ее точках непрерывности) ряд Фурье этой функции сходится к ее значению в рассматриваемой точке.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке длины 2π, и в точке x существуют односторонние производные, то ряд Фурье функции сходится в этой точке к значению* (55.26).

СЛЕДСТВИЕ 3. *Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f сходится в каждой точке интервала $(-\pi, \pi)$ к значению* (55.26), *а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ — к значению*

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}. \tag{55.27}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Ряд Фурье непрерывной кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции сходится в любой точке интервала $(-\pi, \pi)$ к значению функции в этой точке, а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ — к значению* (55.27).

Доказательство теоремы. Используя формулы (55.18) и (55.16), имеем

$$S_n(x; f) - \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,[f(x + t) + f(x - t)]dt -$$

$$- \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f_x^*(t)}{2\sin(t/2)}\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{55.28}$$

Если интеграл (55.25) сходится при некотором $\delta > 0$, то он, очевидно, сходится и при некотором δ таком, что $0 < \delta < \pi$; тогда, согласно лемме 5, примененной к функции f_x^* (см. (55.24)), сходится и интеграл $\int_0^{\pi} \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin(t/2)}dt$, иначе говоря, функция $\frac{f_x^*(t)}{2\sin(t/2)}$ абсолютно интегрируема на отрезке $[0, \pi]$. Поэтому, согласно теореме Римана (см. п. 55.2),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f_x^*(t)}{2\sin(t/2)}\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,dt = 0,$$

следовательно, в силу (55.28),

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}. \square$$

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы в силу определения регулярной точки функции.

Докажем следствие 2. Согласно теореме 4, достаточно показать, что если существуют пределы $f(x+0)$, $f(x-0)$ и односторонние производные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, то интеграл (55.25) сходится при некотором $\delta > 0$. Прежде всего в силу существования конечною предела

$$\lim_{t \to +0} \frac{f_x^*(t)}{t} = \lim_{t \to +0} \left[\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} - \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} \right] = \\ = f'_+(x) - f'_-(x),$$

функция $\frac{f_x^*(t)}{t}$ ограничена в некоторой окрестности точки $t = 0$. Поэтому существует такое δ, $0 < \delta < \pi$, что на отрезке $[0, \delta]$ функция $\frac{f_x^*(t)}{t}$ ограничена и, следовательно, она интегрируема по Риману на этом отрезке (см. п. 29.1, а также замечание 2 в п. 23.7*). Функция, интегрируемая по Риману, абсолютно интегрируема, поэтому интеграл (55.25) конечен. □

Для доказательства следствия 3 функцию f, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, продолжим периодически с периодом 2π с полуинтервала $[-\pi, \pi]$ на всю числовую ось и обозначим полученную функцию через $\bar{f}$. В силу определения кусочной дифференцируемости (см. определение 1 в п. 26.2) функция $\bar{f}$ удовлетворяет условиям следствия 2. Согласно этому следствию ряд Фурье функции $\bar{f}$, очевидно совпадающий с рядом Фурье для f, сходится в каждой точке x к $\frac{\bar{f}(x+0) + \bar{f}(x-0)}{2}$.

Если $x \in (-\pi, \pi)$, то $\bar{f}\,(x \pm 0) = f(x \pm 0)$ и, следовательно, $\frac{\bar{f}(x+0) + \bar{f}(x-0)}{2} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$. При $x = -\pi$ указанный ряд сходится к $\frac{\bar{f}(-\pi+0) + \bar{f}(-\pi-0)}{2}$, а при $x = \pi$ — к значению $\frac{\bar{f}(\pi+0) + \bar{f}(\pi-0)}{2}$. В силу периодичности функции $\bar{f}$,

$$\bar{f}\,(-\pi - 0) = \bar{f}\,(\pi - 0) = f(\pi - 0),\ \bar{f}\,(\pi + 0) = \bar{f}(-\pi + 0) = f(-\pi + 0).$$

Поэтому

$$\frac{\bar{f}(-\pi+0) + \bar{f}(-\pi-0)}{2} = \frac{\bar{f}(\pi+0) + \bar{f}(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}. \ \square$$

Следствие 4 непосредственно вытекает из следствий 1 и 3.

Заметим, что в формулах (55.26) и (55.27) сумма ряда Фурье функции f выражена через саму функцию f, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, а не через ее периодическое продолжение $\overline{f}$ на всю числовую ось.

Если функция f удовлетворяет условиям следствия 4, т. е. непрерывна и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и, кроме того, $f(-\pi) = f(\pi)$ (т. е. ее периодическое продолжение на всю числовую ось совпадает с ней всюду на $[-\pi, \pi]$, включая концы), то на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ функция f равна сумме своего ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Поэтому такая функция в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$ может быть представлена с любой степенью точности частичной суммой ее ряда Фурье, т. е. линейной комбинацией синусов и косинусов кратных дуг (говорят также, что указанная функция аппроксимируется суммой простых гармоник*). То, что в рассматриваемом случае период равен именно 2π, не существенно: случай произвольного периода $T > 0$ легко сводится к рассмотренному простой заменой переменного (см. п. 55.12).

При практическом разложении функций в ряд Фурье полезно иметь в виду, что если абсолютно интегрируемая функция f — четная, то функция $f(x) \cos nx$ также четная, а функция $f(x) \sin nx$ — нечетная, поэтому в этом случае

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

и, следовательно, для четной функции f ее ряд Фурье имеет вид

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

* Простой гармоникой называют (преимущественно в физике) выражение вида $A \cos nx + B \sin nx$, где A и B — постоянные.

Если функция f — нечетная, то $f(x)\cos nx$ также нечетная функция, а $f(x)\sin nx$ — четная, поэтому

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, для нечетной функции f ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Примеры. 1. Найдем ряд Фурье функции $\operatorname{ch} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Вычислим ее коэффициенты Фурье. Коэффициент a_0 находится легко:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} xdx = \frac{\operatorname{sh} x}{\pi}\Bigg|_{\pi}^{\pi} = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}.$$

Коэффициенты a_n находятся интегрированием по частям (см. п. 22.4):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x\cos nxdx = (-1)^n\,\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Из четности функции $\operatorname{ch} x$ следует, что для нее $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Функция $\operatorname{ch} x$ непрерывно дифференцируема и, следовательно, удовлетворяет условиям следствия 4 из теоремы 4; кроме того, она принимает одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, поэтому ее ряд Фурье во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$ сходится к самой функции

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{1+n^2}\cos nx\right).$$

Этот ряд сходится равномерно, что следует из его сравнения со сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}$.

Графики функции $\operatorname{ch} x$ и суммы $S(x)$ его ряда Фурье изображены на рисунке 3.

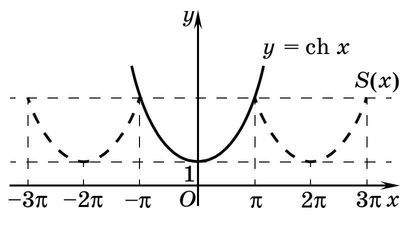


Рис. 3

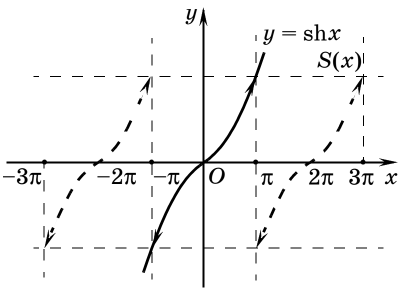


Рис. 4

2. Найдем ряд Фурье функции sh x, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

В силу ее нечетности, имеем $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; далее, интегрируя по частям, находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx dx =$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{2n \operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Функция sh x непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям следствия 4 из теоремы 4, но $\operatorname{sh}(-\pi) \neq \operatorname{sh}\pi$; поэтому во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$ ряд Фурье функции sh x сходится к самой функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{1+n^2}\sin nx, \quad -\pi < x < \pi,$$

а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ — к значению $\frac{\operatorname{sh}(-\pi) + \operatorname{sh}\pi}{2} = 0$.

Ряд Фурье функции sh x уже не сходится равномерно к ней на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ (действительно, в противном случае его сумма должна была бы быть непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, а она имеет разрывы на его концах). Графики функций sh x и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье для сравнения изображены на рисунке 4.

3. Разложим в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Хотя функция f выглядит несколько искусственно, ее ряд Фурье имеет очень простой вид и позволяет получить ряд интересных формул.

Продолжим функцию f 2π-периодически с полуинтервала $[0, 2\pi)$ на всю числовую ось и переопределим ее значения в точках $x = 2k\pi$, положив их равными нулю, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В результате получится нечетная функция, в силу чего все ее коэффициенты Фурье a_n будут равны нулю: $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Вычислим коэффициенты b_n. Интегрируя по частям, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nx dx = -\frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx = \frac{1}{n}.$$

Итак,

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \qquad (55.29)$$

В силу следствия 4 теоремы 4, для $0 < x < 2\pi$ имеет место равенство

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \qquad (55.30)$$

При $x = 0$ это равенство, очевидно, несправедливо, так как сумма получившегося ряда при $x = 0$ равна нулю, а $f(0) \neq 0$.

График суммы ряда (55.29) изображен на рисунке 5. Заметим, что этот ряд заведомо не сходится равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$, так как его сумма не является на нем непрерывной функцией (равномерная сходимость ряда (55.29) была исследована в п. 32.3).

Заменив в (55.30) x через $2x$ и разделив обе части получившегося равенства на 2, получим

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \quad 0 < x < \pi. \qquad (55.31)$$

Вычтем это равенство из (55.30)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)x}{2k-1}, \quad 0 < x < \pi. \qquad (55.32)$$

Подставив получившееся выражение для $\pi/4$ в (55.31), получим

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}. \qquad (55.33)$$

Это равенство верно уже и при $x = 0$, а в силу нечетности обеих частей равенства и при $-\pi < x < 0$, т. е. на всем интервале $(-\pi, \pi)$, но, конечно, не на его концах, в которых сумма ряда равна нулю.

Ряд (55.33) при $x \in [-\pi, \pi]$ был первым примером (его построил Абель в 1826 г.) сходящегося ряда непрерывных функций, сумма которого не непрерывна.

Отметим еще, что, положив в (55.32) $x = \pi/2$, получим так называемый ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

который нам уже встречался раньше (см. пп. 30.9 и 33.7, пример 2).

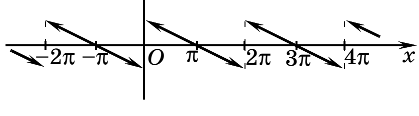


Рис. 5

4. Разложим в ряд Фурье периодическую периода 2π функцию f, если $f(x) = x$ при $|x| < \pi$.

Заданная функция нечетная, поэтому ее коэффициенты Фурье при косинусах равны нулю, а для коэффициентов при синусах имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi x \, d \cos nx =$$

$$= -\frac{\cos \pi n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad |x| < \pi \tag{55.34}$$

(выше, см. (55.33), это разложение было получено косвенным путем).

5. Разложим в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию

$$f(x) = \ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|, \quad x \neq (2m+1)\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Эта функция четная, поэтому $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) dx$$

(так как $\cos |x/2| > 0$ при $0 \leqslant x < \pi$, то знак абсолютной величины у $\cos (x/2)$ можно не писать).

Сделав во втором интеграле замену переменного $x = \pi - t$, убедимся, что $a_0 = 0$.

Для вычисления коэффициентов a_n, $n = 1, 2, \ldots$, произведем интегрирование по частям и сделаем замену переменного $x = \pi - t$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \frac{\sin nx}{n} \Bigg|_0^\pi +$$

$$+ \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin nx \sin (x/2)}{\cos (x/2)} dx = (-1)^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin nx \cos (x/2)}{\sin (x/2)} dx.$$

Представив подынтегральную функцию в виде суммы

$$\frac{\sin nx \cos (x/2)}{\sin (x/2)} = \frac{\sin (n + 1/2)x}{2\sin (x/2)} + \frac{\sin (n - 1/2)}{2\sin (x/2)}$$

и использовав для вычисления интеграла от каждого слагаемого тождества (см. тождество (55.15) в п. 55.3)

$$\frac{\sin (n + 1/2)x}{2\sin (x/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx, \quad \frac{\sin (n - 1/2)x}{2\sin (x/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos kx,$$

будем иметь

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ n = 1, 2, \dots,$$

и, таким образом,

$$\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}, \ |x| < \pi. \qquad (55.35)$$

Метод нахождения ряда Фурье заданной функции непосредственным вычислением его коэффициентов приводит иногда к необходимости проведения большого объема сложных вычислений. Иногда удается обойти эти затруднения, сведя задачу о разложении функции в ряд Фурье функций к задаче разложения функции в степенной ряд, и воспользоваться для этого разработанной в теории степенных рядов техникой.

В основе этого лежит то обстоятельство, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ на окружности $|z| = 1$ сводится к рядам Фурье своей действительной и мнимой части. Действительно, при $|z| = 1$ имеем

$$z = e^{i\varphi}, \ z^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ и если } a_n = b_n + ic_n,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ic_n)(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos nx - c_n \sin n\varphi) + i\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

6. Разложим в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \frac{r + \cos x}{1 + 2r\cos x + r^2}, \ |r| < 1. \qquad (55.36)$$

Эта функция непрерывна при любом $r \in (-1, 1)$, так как ее знаменатель не обращается в нуль:

$$1 + 2r\cos x + r^2 \geqslant 1 - 2|r|\,|\cos x| + r^2 \geqslant 1 - 2|r| + r^2 =$$

$$= (1 - |r|)^2 > 0. \qquad (55.37)$$

Сделав в (55.36) подстановку

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t},$$

где

$$t = e^{ix}, \qquad (55.38)$$

будем иметь

$$\frac{r + \cos x}{1 + 2r\cos x + r^2} = \frac{t^2 + 2rt + 1}{2[rt^2 + (1 + r^2)t + r]} =$$

$$= \frac{t(t + r) + (1 + rt)}{2(t + r)(1 + rt)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1 + rt} + \frac{1}{t + r}\right). \qquad (55.39)$$

Так как $|t| \underset{(55.38)}{=} |e^{ix}| = 1$, а $|r| < 1$, то по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии получим

$$\frac{t}{1+rt} = \frac{1}{r}\,\frac{rt}{1+rt} = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(rt)^n,$$

$$\frac{1}{t+r} = \frac{1}{r}\,\frac{r/t}{1+r/t} = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(r/t)^n;$$

$$\frac{r+\cos x}{1+2r\cos x+r^2} \underset{(55.39)}{=} \frac{1}{2r}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{t^n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^nt^n\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n+t^{-n}}{2}r^n \underset{(55.38)}{=} \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^n\cos nx. \quad (55.40)$$

Полученный ряд равномерно сходится, например, по признаку Вейерштрасса, так как $|(-1)^{n-1}r^n\cos nx| \leqslant |r|^n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|r|^n$, $|r| < 1$, сходится. Следовательно, ряд (55.40) является рядом Фурье заданной функции f (см. теорему 1 в п. 55.1).

7. Разложим в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \frac{r\sin x}{1+2r\cos x+r^2},\ |r| < 1.$$

Снова использовав формулы Эйлера, сделаем подстановку:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{t^2+1}{2t},\quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{t^2-1}{2ti},$$

где $t = e^{ix}$. Рассуждая аналогично примеру 6, получим

$$\frac{r\sin x}{1+2r\cos x+r^2} = \frac{r(t^2-1)}{2i(t+r)(1+rt)} = \frac{(1+rt)t-(t+r)}{2i(t+r)(1+rt)} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{t}{t+r} - \frac{1}{1+rt}\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{r}{t}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(rt)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n-t^{-n}}{2i}r^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^n\sin nx. \quad (55.41)$$

8. Разложим в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{r\sin x}{1+r\cos x},\quad -1 < r \leqslant 1,$$

причем при $r = 1$ выполняется неравенство $x \neq (2m+1)\pi$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Функция f нечетная, следовательно, ее коэффициенты Фурье при косинусах равны нулю. Вычислим ее коэффициен-

ты Фурье при синусах в случае, когда $|r| < 1$. Интегрируя по частям, получим

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\operatorname{arctg}\frac{r\sin x}{1 + r\cos x}\right)\sin nx dx =$$

$$= -\frac{2\cos nx}{n\pi}\operatorname{arctg}\frac{r\sin x}{1 + r\cos x}\Bigg|_0^\pi + \frac{2r}{n\pi}\int\limits_0^\pi \frac{r + \cos x}{1 + 2r\cos x + r^2}\cos nx dx \underset{(55.40)}{=}$$

$$\underset{(55.40)}{=} \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^\pi \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}r^k\cos kx\cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}r^k\int\limits_0^\pi \cos kx\cos nx dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}r^n.$$

Таким образом, если $|r| < 1$, то

$$\operatorname{arctg}\frac{r\sin x}{1 + r\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^n\frac{\sin nx}{n}. \tag{55.42}$$

Если же $r = 1$, но $x \neq (2m + 1)\pi$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, то

$$\operatorname{arctg}\frac{r\sin x}{1 + r\cos x}\Bigg|_{r=1} = \operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1 + \cos x} =$$

$$= \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{x}{2} \underset{(55.34)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n},$$

т. е. разложение (55.42) остается верным и при $r = 1$.

55.5*. Сходимость рядов Фурье для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера

В этом пункте мы укажем более слабое достаточное условие (чем условие односторонней дифференцируемости (см. следствие 2 теоремы 4 в п. 55.4)), также обеспечивающее сходимость интеграла (55.25), следовательно, сходимость ряда Фурье 2π-периодической абсолютно интегрируемой на отрезке длины, равной периоду, функции f к значению (55.26).

Определение 9. *Функция f, определенная на интервале (x_0, b), называется функцией, удовлетворяющей справа условию Гёльдера степени α в точке x_0, если существуют конечный правосторонний предел $f(x_0 + 0)$ и такие постоянные $M > 0$ и $\delta > 0$, что для любого h, удовлетворяющего условию $0 < h < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)| < Mh^\alpha. \tag{55.43}$$

---

* О. Л. Гёльдер (1859—1937) — немецкий математик.

Функция f, определенная на интервале (a, x_0), называется функцией, удовлетворяющей слева условию Гёльдера степени α в точке x, если существуют конечный левосторонний предел $f(x_0 - 0)$ и такие постоянные $M > 0$ и $\delta > 0$, что для любого h, удовлетворяющего условию $0 < h < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)| < Mh^{\alpha}. \tag{55.44}$$

Функция f, удовлетворяющая в точке x_0 условию Гёльдера некоторой степени как справа, так и слева, называется функцией, удовлетворяющей условию Гёльдера данной степени в рассматриваемой точке.

Функция, определенная на некотором отрезке, называется функцией, удовлетворяющей условию Гёльдера данной степени на этом отрезке, если в каждой его точке она удовлетворяет условию Гёльдера указанной степени, причем в каждой внутренней точке отрезка как справа, так и слева: в левом конце отрезка — справа, а в правом — слева.

Отметим, что так называемое классическое условие Гёльдера данной степени состоит в следующем. Функция f называется *удовлетворяющей в точке x классическому условию Гёльдера степени $\alpha > 0$, если существуют такие $\delta > 0$ и $M > 0$, что для всех h, $|h| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}.$$

Очевидно, что в этом случае благодаря условию $\alpha > 0$ функция f всегда непрерывна в точке x:

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x).$$

Аналогично определяются односторонние классические условия Гёльдера.

Таким образом, отличие рассматриваемого условия Гёльдера от классического состоит, в частности, в том, что, согласно нашему определению, функция, удовлетворяющая условию Гёльдера в некоторой точке, может быть разрывной в ней.

Условие Гёльдера степени единица обычно называется *условием Липшица**.

УПРАЖНЕНИЯ. 4. Доказать, что если функция удовлетворяет в некоторой точке условию Гёльдера степени α, то при $0 < \beta < \alpha$ она удовлетворяет в этой точке и условию Гёльдера степени β.

* Р. Липшиц (1832—1903) — немецкий математик.

5. Доказать, что если функция имеет на отрезке ограниченную производную, то она удовлетворяет на нем условию Липшица с одной и той же постоянной M.

6. Доказать, что если функция удовлетворяет на некотором отрезке классическому условию Гёльдера степени $\alpha > 1$, то она постоянна на этом отрезке.

7. Доказать, что функция $f(x) = x^\alpha$, $x \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, удовлетворяет в точке $x = 0$ условию Гёльдера степени α и не удовлетворяет в ней никакому условию Гёльдера степени $\beta > \alpha$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если она удовлетворяет в точке $x \in (-\pi, \pi)$ условию Гёльдера степени α, $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье сходится в этой точке и его сумма равна $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$; в частности, если функция, кроме того, непрерывна в точке $x \in (-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится к значению функции в этой точке*:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x).$$

Если функция f удовлетворяет условию Гёльдера справа в точке $x = -\pi$ и слева в точке $x = \pi$, то ее ряд Фурье сходится в этих точках и его сумма в них равна $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$.

Доказательство. Выберем δ, $0 < \delta < \pi$, так, чтобы, во-первых, на любом отрезке $[\xi, \delta]$, $0 < \xi < \delta$, функция $f_x^*(t)$, а поэтому и $\frac{f_x^*(t)}{t^\alpha}$, были интегрируемы по Риману, а во-вторых, чтобы при всех h, $|h| < \delta$, функция f удовлетворяла условиям Гёльдера (55.43) и (55.44) в точке x. Тогда, в силу формулы (55.24), для функции $f_x^*(t)$ имеем

$$\left|\frac{f_x^*(t)}{t}\right| \leqslant \left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right| \underset{\substack{(55.43)\\(55.44)}}{\leqslant} \frac{2M}{t^{1-\alpha}}.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$, $\alpha > 0$, сходится, то, в силу признака сравнения, сходится в нашем случае и интеграл (55.25). Поэтому теорема 5 следует из теоремы 4. □

В заключение заметим, что если функция f в точке x имеет правостороннюю производную f'_+, то f удовлетворяет в этой точке справа условию Гёльдера степени 1. В самом деле, из существования конечного предела

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} = f'_+(x)$$

следует, что найдется такое $\delta > 0$, что для всех h, $|h| < \delta$, будет справедливым неравенство

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} - f'_+(x)\right| < 1,$$

откуда, положив $M \overset{\text{def}}{=} |f'_+(x)| + 1$, получим

$$-M < \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} < M;$$

следовательно,

$$|f(x+h) - f(x+0)| \leqslant M\,|h|,\ |h| < \delta.$$

Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для левосторонних производных.

Задача 1. Функция, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *функцией класса Гёльдера* $H^\alpha(M)$ на этом отрезке, если для каждой пары точек x и $x + h$ этого отрезка, $x \in [a, b]$, $x + h \in [a, b]$, выполняется неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M\,|h|^\alpha,$$

иначе говоря, если функция удовлетворяет классическому условию Гёльдера одной и той же степени α и с одной и той же постоянной M во всех точках отрезка $[a, b]$.

Доказать, что если 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на отрезке длины 2π функция принадлежит на некотором отрезке $[a, b]$ классу Гёльдера $H^\alpha(M)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $M > 0$, то на всяком отрезке $[a', b']$, содержащемся в интервале (a, b): $0 \leqslant a < a' < b' < b \leqslant 2\pi$ – ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно.

55.6. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических

Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, следовательно, 2π-периодически продолжаема на всю вещественную ось. Пусть $S_n(x)$ — ее суммы Фурье, а $D_n(x)$ — ядра Дирихле, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. (55.11) и (55.12)).

Рассмотрим средние арифметические сумм Фурье и ядер Дирихле:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1},$$

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_n(x)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (55.45)$$

Сумма $\sigma_n(x)$ называется *суммой Фейера** n*-го порядка* функции f, а $\Phi_n(x)$ — *ядром Фейера* n*-го порядка*.

Из формулы

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)du$$

(см. (55.17)) получаем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u)du. \quad (55.46)$$

Будем исследовать поведение сумм $\sigma_n(x)$ при $n \to \infty$, т. е. рассмотрим суммирование ряда Фурье методом средних арифметических (см. п. 30.15).

Изучим прежде всего свойства ядра Фейера.

ЛЕММА 6. *Ядра Фейера имеют следующие свойства*:

1^0. *Они являются непрерывными, четными, 2π-периодическими функциями и*

$$\Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}. \quad (55.47)$$

2^0.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \Phi_n(t)dt = 1. \quad (55.48)$$

3^0. *При* $t \neq 2\pi m$, $m = 0, +1, +2, \ldots$, *справедлива формула*

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}. \quad (55.49)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Ядро Фейера неотрицательно при любом* $t \in \boldsymbol{R}$:

$$\Phi_n(t) \geqslant 0. \quad (55.50)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *При любом* δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, *имеет место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = 0. \quad (55.51)$$

Доказательство леммы. Свойства 1^0 вытекают из соответствующих свойств ядер Дирихле, например:

$$\Phi_n(0) \underset{(55.45)}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(0) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2}.$$

---

* Л. Фейер (1880—1959) — венгерский математик.

Свойство 2^0 также вытекает из соответствующего свойства ядра Дирихле:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt \underset{(55.45)}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}1 = 1.$$

Второе равенство (55.48) сразу следует из четности ядер Фейера.

Докажем свойство 3^0. Пусть $t \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; тогда

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t) \underset{(55.15)}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+1/2)t}{2\sin(t/2)} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\frac{t}{2}\sin(k+1/2)t}{4\sin^2(t/2)} =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)\sin^2(t/2)}\sum_{k=0}^{n}[\cos kt - \cos(k+1)t] =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)t}{4(n+1)\sin^2(t/2)} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2(t/2)}.$$

Следствие 1 вытекает из формул (55.47) и (55.49).

Докажем следствие 2. При любом δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, имеем

$$0 \underset{(55.50)}{\leqslant} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi}\Phi_n(t) \underset{(55.49)}{=}$$

$$= \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2(t/2)} \leqslant \frac{1}{2(n+1)\sin^2(\delta/2)}.$$

Отсюда при $n \to \infty$ сразу следует (55.51). □

Примерный вид графика ядра Фейера изображен на рисунке 6. Образно говоря, ядра Фейера представляют собой такие неотрицательные функции, «существенные значения» которых при возрастании n все больше сосредоточиваются в окрестности нуля в том смысле, что при любом δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, их значения вне δ-окрестности равномерно стремятся к нулю (см. (55.51)), а интегралы от этих функций все время сохраняют постоянное значение (см. (55.48)), к которому стремится интеграл от них по δ-окрестности нуля при $\delta \to 0$.

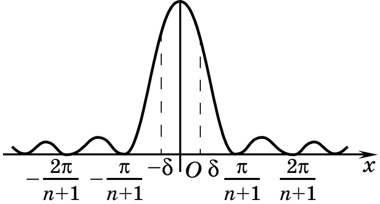


Рис. 6

Подобные последовательности функций называются δ-последовательностями, и мы встретимся еще с ними в параграфе «Обобщенные функции» при изучении δ-функции Дирака.

В этом пункте будем рассматривать только непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f, принимающие на его концах равные значения: $f(-\pi) = f(\pi)$. Очевидно, каждую такую функцию можно продолжить 2π-периодически с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю числовую ось $\boldsymbol{R}$. Полученная функция, которую обозначим через $\bar{f}$, будет непрерывна на всей оси $\boldsymbol{R}$.

Исходная функция f, как всякая непрерывная на отрезке функция, ограничена, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [-\pi, \pi]$. Ясно, что тогда

$$|\bar{f}(x)| \leqslant M, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

т. е. функция $\bar{f}$ ограничена на всей оси $\boldsymbol{R}$.

Кроме того, функция $\bar{f}$ равномерно непрерывна на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$. В самом деле, будучи непрерывной на любом конечном отрезке, например на $[0, 4\pi]$, она равномерно непрерывна на нем (см. теорему 5 в п. 19.6). Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, $0 < \delta < 2\pi$, что для всех $x_1 \in [0, 4\pi]$, $x_2 \in [0, 4\pi]$, $|x_2 - x_1| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Но для произвольных x_1' и x_2' таких, что $|x_2' - x_1'| < \delta$, найдется целое число n, для которого $x_1 \overset{\text{def}}{=} x_1' - 2\pi n \in [0, 4\pi]$, $x_2 \overset{\text{def}}{=} x_2' - 2\pi n \in [0, 4\pi]$ и поэтому $|x_2 - x_1| = |x_2' - x_1'| < \delta$, а поскольку в силу 2π-периодичности $f(x_1) = f(x_1')$, $f(x_2) = f(x_2')$, то

$$|\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| = |\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность функции $\bar{f}$ на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$.

В дальнейшем будем периодически продолженную функцию обозначать тем же символом f, что и продолжаемую.

ТЕОРЕМА 6 (теорема Фейера). *Если функция непрерывна на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и принимает на его концах равные значения, то последовательность ее сумм Фейера сходится равномерно на этом отрезке к самой функции.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если ряд Фурье непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции, принимающей на его концах равные значения, сходится в некоторой точке, то он сходится к значению функции в этой точке.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если все коэффициенты Фурье функции, непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и принимающей на его концах одинаковые значения, равны нулю, то сама функция тождественно равна нулю на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Продолжим ее 2π-периодически на всю числовую ось $\boldsymbol{R}$. Оценим разность $f(x) - \sigma_n(x)$ между функцией f и ее суммой Фейера σ_n, используя представление суммы Фейера в виде (55.46) и свойства ядра Фейера, доказанные в лемме 6 и ее следствии.

Зафиксируем точку $x \in [-\pi, \pi]$ и зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|f(x) - \sigma_n(x)| = \left|\frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)f(x+t)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)[f(x) - f(x+t)]dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}, \tag{55.52}$$

где $\delta > 0$ выбрано так, что значение модуля непрерывности $\omega(\delta; f)$ функции f удовлетворяет неравенству $\omega(\delta; f) < \varepsilon/3$. Это возможно, так как функция f равномерно непрерывна на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$. Поэтому для любого $x \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|dt \leqslant \frac{\omega(\delta; f)}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{55.53}$$

Оставшиеся два интеграла оцениваются одинаковым способом: функция f ограничена на всей числовой прямой, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ имеет место неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Следовательно, для любого $x \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)[|f(x)| + |f(x+t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)dt \leqslant \frac{2M}{\pi}\max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t)\int_{\delta}^{\pi} dt =$$

$$= \frac{2M(\pi - \delta)}{\pi}\max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) < 2M\max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t).$$

Согласно следствию 2 из леммы 6, правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому существует такое n_0, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\left|f(x) - f(x+t)\right|dt < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (55.54)$$

Аналогично для любого $x \in \boldsymbol{R}$ и всех $n > n_0$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\left|f(x) - f(x+t)\right|dt < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (55.55)$$

Из (55.52) — (55.55) для произвольного $x \in \boldsymbol{R}$ и всех $n > n_0$ имеем

$$\left|f(x) - \sigma_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

и так как выбор номера n_0 не зависит от выбора точки $x \in [-\pi, \pi]$, то последовательность $\{\sigma_n\}$ сходится равномерно на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ к функции f. □

Доказательство следствия 1. Всякий сходящийся ряд суммируется методом средних арифметических к своей сумме (см. п. 34.15). Поэтому если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, принимающей на его концах одинаковые значения, сходится в некоторой точке к какому-то числу A, то предел последовательности средних арифметических частичных сумм, т. е. сумм Фейера, также равен A: если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x_0; f) = A$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(x_0) = A$. Но, согласно доказанной теореме, $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$; следовательно, и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x_0; f) = f(x_0)$. □

Подчеркнем, что ряд Фурье функции, непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимающей на его концах одинаковые значения, может расходиться в ряде точек. Однако, согласно доказанному, если он сходится в некоторой точке, то обязательно к значению самой функции в этой точке.

Доказательство следствия 2. Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, принимает одинаковые значения на его концах и все ее коэффициенты Фурье равны нулю, то и ее суммы Фурье всех порядков тождественно равны нулю, а тогда тождественно равны нулю и все суммы Фейера функции f. Эти суммы во всех точках $x \in \boldsymbol{R}$ сходятся к f, поэтому и сама функция тождественно равна нулю. □

В заключение заметим, что для непрерывной на отрезке функции, принимающей на его концах одинаковые значения, ряд Фурье, независимо от его сходимости или расходимости в отдельных точках, позволяет однозначно восстановить указанную функцию: достаточно образовать из его частичных сумм суммы Фейера — их последовательность уже сходится, и притом равномерно, к самой функции. Таким образом, даже изучение расходящегося ряда может оказаться полезным.

55.7. Приближение непрерывных функций многочленами

Определение 10. *Функции вида*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx, \quad A_n^2 + B_n^2 > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

называются тригонометрическими многочленами (полиномами) степени n^*.

ТЕОРЕМА 7 (теорема Вейерштрасса). *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и* $f(-\pi) = f(\pi)$, *то для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой тригонометрический многочлен* $T(x)$, *что*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Доказательство. Очевидно, что все частные суммы Фурье, а следовательно, и суммы Фейера абсолютно интегрируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций являются тригонометрическими многочленами. Поэтому в качестве искомого тригонометрического полинома $T(x)$ согласно теореме 6 можно взять, например, соответствующую сумму Фейера $\sigma_n(x)$, являющуюся, очевидно, тригонометрическим полиномом порядка не выше n. □

ТЕОРЕМА 8 (теорема Вейерштрасса). *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует алгебраический многочлен* $P(x)$ *такой, что*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Доказательство. Отобразим отрезок $[0, \pi]$ линейно на отрезок $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

---

* Здесь считается, что $B_0 = 0$.

и пусть $f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}t\right)$. Функция f^* определена этой формулой на $[0, \pi]$. Продолжим ее четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$, т. е. положим

$$f^*(t) = f^*(-t), \text{ если } t \in [-\pi, 0].$$

Полученная таким образом функция f^* непрерывна на $[-\pi, \pi]$ (почему?) и $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$. Поэтому, согласно теореме 7, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином $T(t)$ такой, что

$$|f^*(t) - T(t)| < \varepsilon/2.$$

Как мы знаем, $\cos kt$ и $\sin kt$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому и тригонометрический полином $T(t)$ являются аналитическими функциями и поэтому разлагаются в степенные ряды, сходящиеся на всей действительной прямой и, следовательно, равномерно сходящиеся на каждом конечном отрезке (см. § 33):

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Если $P_n(t)$ суть частичные суммы этого ряда, то, в силу его равномерной сходимости на отрезке $[-\pi, \pi]$, существует такой номер n_ε, что при $n > n_\varepsilon$

$$|T(t) - P_n(t)| < \varepsilon/2, \ \ -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Беря для определенности $n = n_\varepsilon + 1$ и полагая $P(t) = P_{n_\varepsilon + 1}(t)$, имеем

$$|f^*(t) - P(t)| \leqslant |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Возвращаясь к переменной x, т. е. полагая $t = \pi\,\frac{x-a}{b-a}$, получим

$$\left|f(x) - P\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $P\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$ — очевидно, алгебраический многочлен. □

З а м е ч а н и е. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Возьмем какую-либо последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящуюся к нулю (например, $\varepsilon_n = 1/n$); тогда, согласно теореме 8, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует многочлен $P_n(x)$ (здесь n порядковый номер, а не степень многочлена) такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n, \ \ a \leqslant x \leqslant b. \qquad (55.56)$$

Очевидно, при $n \to \infty$ имеем $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Итак, всякая непрерывная на отрезке функция является пределом равномерно сходящейся на этом отрезке последовательности многочленов. Обратное, т. е. что всякая функция, являющаяся пределом равномерно сходящейся на некотором отрезке последовательности многочленов (и, более того, последовательности любых непрерывных функций), непрерывна на этом отрезке, уже доказано (см. теорему 8′ в п. 32.4).

Таким образом, теорема Вейерштрасса устанавливает характеристическое свойство непрерывных и только непрерывных функций.

Весьма любопытно отметить, что первоначально понятие непрерывности функции было введено нами в абстрактной общей форме, оно никак не было связано с конкретными классами элементарных функций, в частности — с многочленами, и тем самым ни с какими аналитическими представлениями функций через многочлены.

Теорема Вейерштрасса показывает, что введенный таким образом класс непрерывных функций в известном смысле не очень далек от класса многочленов! Именно, какова бы ни была непрерывная на отрезке функция f и как мало бы ни было заранее заданное число $\varepsilon > 0$, всегда существует многочлен, отличающийся на всем отрезке от функции f не более чем на ε, т. е. аппроксимирующий (приближающий) ее с любой, наперед заданной степенью точности! Нетрудно получить и аналитическое представление в виде ряда многочленов для непрерывной на отрезке функции. Из (55.56) имеем

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x),\ a \leqslant x \leqslant b, \tag{55.57}$$

или

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \tag{55.58}$$

($P_n(x)$ — многочлены), причем стремление к пределу в (55.57) и сходимость ряда (55.58) происходят равномерно на отрезке $[a, b]$. При этом как существование предела (55.57), так и существование разложения (55.58) являются необходимым и достаточным условием непрерывности функции f на рассматриваемом отрезке. Это оправдывает интуитивное представление о функции как об аналитическом выражении, составленном из независимой переменной и постоянных посредством алгебраических и аналитических операций.

Аналогичные замечания можно сделать и по поводу первой теоремы Вейерштрасса (теорема 7).

55.8. Полнота тригонометрической системы и системы неотрицательных целых степеней *x* в пространстве непрерывных функций

В этом пункте мы перефразируем доказанные выше теоремы и выведем из них некоторые простые следствия.

Определение 11. *Пусть X — некоторое множество функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Система функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \quad \varphi_n \in X,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{55.59}$$

называется полной для множества X в смысле равномерного приближения, если, какова бы ни была функция $f \in X$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное число функций φ_{n_1}, $\varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_k}$ из системы (55.59) и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

$$|f(x) - [\lambda_1 \varphi_{n_1}(x) + \lambda_2 \varphi_{n_2}(x) + \ldots + \lambda_k \varphi_{n_k}(x)]| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$.

Иначе говоря, система функций (55.46) образует полную систему для множества X, если любую функцию из X можно сколь угодно точно приблизить конечными линейными комбинациями функций системы (55.59).

Используя понятие полноты системы, теоремы 7 и 8 предыдущего параграфа можно перефразировать соответственно следующим образом.

ТЕОРЕМА 7′. *Система тригонометрических функций* (55.2) *полна, в смысле равномерного приближения для множества непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций принимающих на его концах равные значения.*

ТЕОРЕМА 8′. *Система целых неотрицательных степеней x, т. е. система*

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots, \tag{55.60}$$

полна в смысле равномерного приближения для множества всех непрерывных на любом заданном отрезке функций.

Определение 12. *Пусть функции f и g определены на отрезке $[a, b]$. Число*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$$

*называется средним квадратичным отклонением на отрезке $[a, b]$ функции f от функции g**.

* Можно сказать и «отклонение функции g от функции f», поскольку рассматриваемое выражение не меняет своего значения, если f и g поменять местами.

Определение 13. *Система функций* (55.59) *называется полной в смысле среднего квадратичного приближения для некоторого множества X функций, определенных на отрезке* $[a, b]$, *если, какова бы ни была функция* $f \in X$, *для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такая конечная линейная комбинация функций системы* (55.59), *что ее среднее квадратичное отклонение на отрезке* $[a, b]$ *от функции* f *меньше* ε.

ТЕОРЕМА 9. *Система тригонометрических функций* (55.2) *полна в смысле среднего квадратичного приближения во множестве непрерывных на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функций, принимающих в точках* π *и* $-\pi$ *одно и то же значение.*

Доказательство. Пусть f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция, причем $f(\pi) = f(-\pi)$. Согласно теореме 7′, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Отсюда для среднего квадратичного отклонения этого полинома от функции f имеем

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \varepsilon. \; \square$$

В дальнейшем мы увидим (см. п. 58.6), что ограничение $f(\pi) = f(-\pi)$, использованное нами при доказательстве теоремы 9 (только в этом случае можно было сослаться на теорему 7′), не является существенным. Именно, тригонометрическая система (55.2) полна в смысле среднего квадратичного во всем множестве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций и, более того, можно показать, что она полна в смысле среднего квадратичного и во множестве всех интегрируемых (в собственном или несобственном смысле) функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом.

Заметим, что тригонометрическая система (55.2) заведомо не полна во множестве всех непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций в смысле равномерного приближения, т. е. в смысле определения 11. Действительно, если функция f такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином T_ε, что

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

то из условия $T_\varepsilon(\pi) = T_\varepsilon(-\pi)$ при $\varepsilon \to 0$ следует, что $f(\pi) = f(-\pi)$.

При приближении функций в смысле среднего квадратичного тригонометрическими полиномами особую роль играют частичные суммы ряда Фурье приближаемой функции. В следующем пункте будет показано, что частичная сумма n-го по-

рядка имеет наименьшее среднее квадратичное отклонение от данной функции по сравнению с любым тригонометрическим полиномом степени n.

Наконец, можно показать, что если функция f рассматриваемого класса обладает интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$, то отклонение от нее в смысле среднего квадратичного ее частичных сумм Фурье $S_n(x)$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$, или, как говорят, функция f с интегрируемым квадратом является пределом в смысле среднего квадратичного своих частичных сумм Фурье (см. об этом в п. 58.6). Все эти обстоятельства говорят в пользу изучения приближения функций в смысле среднего квадратичного отклонения.

Аналогично теореме 9 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10. *Система неотрицательных целых степеней x, т. е. система* (55.47), *полна в смысле среднего квадратичного приближения во множестве непрерывных на любом заданном отрезке функций.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$, согласно теореме 8′, существует такой полином P, что

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \; a \leqslant x \leqslant b,$$

откуда

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx} < \varepsilon. \; \square$$

55.9. Минимальное свойство сумм Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля

В этом пункте мы рассмотрим ряды Фурье для интегрируемых функций, квадрат которых также интегрируем (здесь интегрируемость понимается, вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[-\pi, \pi]$. Существенно заметить, что если функция f такова, что для нее существует правильное разбиение отрезка $[-\pi, \pi]$ (см. п. 55.1), и ее квадрат f^2 интегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$, то из неравенства $|f| \leqslant \frac{1 + |f|^2}{2}$ следует, что функция $|f|$ интегрируема на этом отрезке. Обратное, вообще говоря, неверно. Существуют положительные функции (например, функция $1/\sqrt{|x|}$), интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$, квадрат которых, однако, уже не интегрируем на нем.

Таким образом, указанное множество функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом составляет собственное подмножество множества всех абсолютно интегрируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций.

Заметим, что аналогично вводится понятие функции с интегрируемым квадратом и для любого конечного промежутка.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть квадрат функции f интегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда если $S_n(x)$ — ее сумма Фурье порядка n, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx, \qquad (55.61)$$

где минимум в правой части равенства берется по всем тригонометрическим многочленам T_n степени не выше n.

Если a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$, суть коэффициенты Фурье функции f, то справедливо неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \qquad (55.62)$$

называемое неравенством Бесселя.*

Доказательство. Пусть

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx,$$

тогда, открывая квадратные скобки в выражении

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \qquad (55.63)$$

и используя лемму 1 из п. 55.1 (в частности, ортогональность тригонометрической системы), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right) -$$

$$- 2\left[\frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx\right] =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right) - 2\pi\left[\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k A_k + b_k B_k\right] =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi\left[\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k - a_k)^2 + \right.$$

$$\left. + (B_k - b_k)^2\right] - \pi\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right]. \qquad (55.64)$$

---

* Ф. Бессель (1784—1846) — немецкий астроном и математик.

Из полученного выражения видно, что величина (55.63) принимает наименьшее значение, когда $A_0 = a_0$, $A_k = a_k$, $B_k = b_k$, $k = 1, 2, \dots$, т. е. тогда, когда $T_n(x)$ является суммой Фурье $S_n(x)$ порядка n функции f. Первое утверждение теоремы доказано.

Если $T_n(x) = S_n(x)$ — сумма Фурье порядка n, то из (55.64) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right], \quad (55.65)$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0.$$

Это неравенство справедливо при любом натуральном n. Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0,$$

очевидно, равносильное неравенству (55.62). □

Из неравенства Бесселя следует, что для функции с интегрируемым квадратом ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

сходится. Общий член сходящегося ряда стремится к нулю, поэтому в рассматриваемом случае $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.

Таким образом, мы еще раз установили стремление к нулю коэффициентов Фурье (см. п. 55.2), однако на этот раз для более узкого (как это отмечалось в начале этого пункта) класса функций, чем раньше, а именно для класса функций с интегрируемым квадратом.

В п. 60.6 будет показано, что на самом деле соотношение (55.62) справедливо со знаком равенства. Здесь мы докажем этот факт лишь для случая, когда функция f непрерывна и 2π-периодична.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть f непрерывна на отрезке* $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ *и* a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \dots$, *— ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

называемое равенством Парсеваля.*

---

* М. Парсеваль (1755—1836) — французский математик.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$, в силу полноты в смысле среднего квадратичного приближения системы, тригонометрических функций (55.2) в классе непрерывных функций, принимающих одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, для функции f существует тригонометрический полином $T(x)$ некоторого порядка k такой, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon. \tag{55.66}$$

Согласно же теореме 11 (см. (55.61)), для суммы Фурье $S_k(x)$ того же порядка k выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_k(x)]^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T(x)]^2 dx.$$

Отсюда и из формул (55.65) и (55.66) получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_k(x)]^2 dx \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T(x)]^2 < \varepsilon.$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, его левая часть равна нулю. □

СЛЕДСТВИЕ. *Если выполнены предположения теоремы, то*

$$\lim_{n \to \infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$$

Действительно, в силу теоремы 12, при $n \to \infty$ правая часть равенства (55.65) стремится к нулю. □

55.10. Характер сходимости рядов Фурье. Почленное дифференцирование рядов Фурье

Изучим связь рядов Фурье функции и ее производной.

ТЕОРЕМА 13. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и пусть*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Если функция f кусочно-непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. определение 1 в п. 26.2), то

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx,$$

т. е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье самой функции формальным почленным дифференцированием.*

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Тогда, замечая, что $f(\pi) = f(-\pi)$, и интегрируя по частям, получим:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)dt = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} f(t) \cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt = nb_n,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin ntdt = f(t) \sin nt\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt = -na_n,$$

$$n = 1, 2, \ldots . \square$$

Перейдем к изучению скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функций. Предварительно докажем лемму.

ЛЕММА 7. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывные производные до порядка $k - 1$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка k ($k \geqslant 1$)**, причем*

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi),\ j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

тогда коэффициенты Фурье функции f удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k},\quad |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k},\quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ сходится.

---

* При этом без каких-либо предположений о сходимости ряда Фурье производной.

**Мы говорим, что некоторая функция имеет кусочно-непрерывную производную на данном отрезке, если эта функция является кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией на указанном отрезке (см. определение 1 в п. 26.2). Тем самым если функция имеет кусочно-непрерывную производную на каком-то отрезке, то может случиться, что в конечном числе точек этого отрезка она вовсе не имеет производной. Например, функция $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет кусочно-непрерывную производную, а в точке $x = 0$ не имеет производной.

Доказательство. Применяя последовательно теорему 13 k раз, получим

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

где либо

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \quad \beta_n = \pm n^k b_n, \tag{55.67}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \quad \beta_n = \pm n^k a_n, \tag{55.68}$$

причем, по неравенству Бесселя,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^{(k)}(x)]^2 dx. \tag{55.69}$$

Положим $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$. В силу неравенства (55.69), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ сходится.

Если справедливо (55.67), то

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n^k} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k}.$$

Аналогично

$$|b_n| = \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Подобным же образом эта оценка получается и в случае (55.68). □

ТЕОРЕМА 14. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывные производные до порядка $k - 1$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка k ($k \leqslant 1$), причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k - 1$. Тогда ряд Фурье функции f равномерно и абсолютно на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ сходится к самой функции f и*

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}},$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$ ($\{\eta_n\}$ — числовая последовательность), а $S_n(x; f)$ — сумма Фурье порядка n функции f.

Таким образом, можно сказать, что на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно выполняется оценка

$$f(x) - S_n(x; f) = o(n^{-k+1/2}).$$

Предварительно заметим, что если $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — последовательности неотрицательных чисел таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2}. \tag{55.70}$$

Действительно, это неравенство сразу получается предельным переходом из неравенства Коши—Шварца

$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} u_n^2}\ \sqrt{\sum_{n=1}^{N} v_n^2} \text{ при } N \to \infty \text{ (см. пп. 30.8* и 35.1).}$$

Отметим, что неравенство (55.70) является частным случаем неравенства (30.33) из п. 30.8* при $p = q = 2$.

Доказательство теоремы 14. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx, \qquad (55.71)$$

$$S_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos mx + b_m \sin mx.$$

По лемме 7,

$$|a_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \quad |b_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \qquad (55.72)$$

где ε_m таковы, что сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2 . \qquad (55.73)$$

Применяя неравенства (55.70) и (55.72), оценим остаток $r_n(x)$ ряда (55.71):

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \leqslant 2 \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}\ \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}}. \qquad (55.74)$$

Положим

$$\varkappa_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2 .$$

В силу сходимости ряда (55.73), имеем

$$\lim_{n \to \infty} \varkappa_n = 0. \qquad (55.75)$$

Далее заметим, что на отрезке $[m - 1, m]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \frac{1}{x^{2k}} \text{ (рис. 7),}$$

следовательно, $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}$. Поэтому

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k-1)n^{2k-1}}.$$

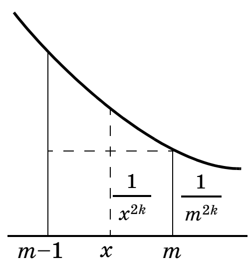


Рис. 7

Таким образом, из (55.74) вытекает оценка

$$|r_n(x)| \leqslant 2\sqrt{\frac{\varkappa_n}{2k-1}}\,\frac{1}{\sqrt{n^{2k-1}}}. \qquad (55.76)$$

Положим, наконец, $\eta_n = \frac{2}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\varkappa_n}$; в силу (55.75), $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n = 0$. Поэтому из неравенства (55.76) имеем

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}} = o\left(\frac{1}{n^{k-1/2}}\right),\ n = 1, 2, \dots,$$

при этом бесконечно малая η_n не зависит от точки x.

Согласно следствию 4 из теоремы 4 п. 55.4, ряд (55.71) сходится к функции $f(x)$; следовательно, $r_n(x) = f(x) - S_n(x, f)$ и, таким образом, равномерная сходимость ряда Фурье с указанной оценкой доказана.

Его абсолютная сходимость также доказана, так как в процессе доказательства мы получили оценку (см. (55.74))

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}},$$

из которой следует, что ряд Фурье функции f не только абсолютно сходится, но и что ряд, составленный из абсолютных величин его членов, и даже, более того, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_m| + |b_m|$ сходится с той же «скоростью» $\frac{\eta_n}{n^{k-1/2}}$. □

Теорема 14 показывает, что чем глаже функция f, т. е. чем больше она имеет производных, тем быстрее сходится к ней ее ряд Фурье. При этом неравенство (53.76) дает возможность оценивать погрешность, получающуюся при замене ряда Фурье его n-частичной суммой. Из этой теоремы следует, в частности при $k = 1$, что ряд Фурье всякой периодической периода 2π непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функции (см. п. 26.2) равномерно на всем периоде сходится к самой функции.

УПРАЖНЕНИЯ. 8. Будет ли ряд Фурье функции $f(x) = |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, сходиться равномерно? Будет ли равномерно сходиться ряд, полученный почленным дифференцированием ряда Фурье этой функции?

9. Показать, что ряд Фурье непрерывной периодической кусочно-линейной функции (определение кусочно-линейной функции см. в упражнении в п. 6.4) сходится к ней равномерно.

10. Используя результат предыдущего упражнения и результат упражнения из п. 6.4, доказать теорему 7 из п. 55.7 о равномерной аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.

55.11. Почленное интегрирование рядов Фурье

В этом пункте покажем, что ряды Фурье можно почленно интегрировать.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть f — непрерывная на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функция и*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (55.77)$$

— ее ряд Фурье. Тогда

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{a_0 dx}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx =$$

$$= \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt) \qquad (55.78)$$

и ряд, стоящий справа, сходится равномерно.

Отметим, что утверждение о сходимости (и даже равномерной) ряда (55.78) имеет место без каких-либо предположений о сходимости исходного ряда (55.77).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx - \frac{a_0 t}{2}. \qquad (55.79)$$

Она непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеет на этом отрезке непрерывную производную $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$ и

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \pi a_0 = 0.$$

Поэтому, в силу теоремы 14, ее ряд Фурье сходится к ней, и притом равномерно. Обозначим ее коэффициенты Фурье через A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, в силу сказанного,

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \sin nt. \qquad (55.80)$$

Найдем коэффициенты этого ряда. Интегрируя по частям, получим

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} F(t) \frac{\sin nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] \sin nt dt = -\frac{b_n}{n}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Аналогично $B_n = \frac{a_n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Чтобы найти A_0, положим в (55.80) $t = 0$. Тогда, заметив, что $F(0) = 0$, получим

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0, \text{ откуда } \frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Итак,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt).$$

Отсюда и из (55.79) и следует формула (55.78); равномерная же сходимость ряда (55.65) следует из равномерной сходимости ряда (55.80). □

Задача 2. Доказать, что сходящийся тригонометрический ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

Отметим, что если $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ и, следовательно, $a_0 = 0$, то в результате почленного интегрирования ряда Фурье функции f снова получается ряд Фурье некоторой первообразной F функции f, а именно, как следует из доказанного, первообразной

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Для любой первообразной Φ непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f справедлива формула Ньютона—Лейбница

$$\Phi(\pi) - \Phi(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

поэтому условие $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ равносильно тому, что все первообразные функции f принимают на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ одинаковые значения.

Рассмотрим более подробно вопрос о первообразных функции f в этом случае. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$; следовательно,

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{55.81}$$

Если Φ — какая-либо первообразная функции f, то так как она отличается от функции $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ лишь на постоянную, то ее ряд Фурье отличается от ряда Фурье функции только на постоянную. Согласно доказанному,

$$F(t) \underset{(55.78)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt.$$

Следовательно, ряд Фурье функции Φ имеет вид

$$c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt,$$

т. е. получается формальным интегрированием (в смысле неопределенного интеграла) из ряда (55.81), причем так как $\Phi(-\pi) = \Phi(\pi)$ и производная $\Phi'(x) = f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$\Phi(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi. \qquad (55.82)$$

Для определения постоянной c в этом равенстве выбирают какое-либо значение t, при котором удается найти сумму стоящего в правой части равенства (55.82) ряда.

Теоремы о почленном дифференцировании и почленном интегрировании рядов Фурье помогают находить разложение в ряд Фурье функции, если известно разложение в ряд Фурье ее первообразной или производной.

Пример. Разложим в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \ln(1 + 2r\cos x + r^2), \; |r| < 1.$$

Так как при $|r| < 1$ справедливо неравенство (см. (55.37)) $1 + 2r\cos x + r^2 > 0$, то функция непрерывна на всей действительной оси и, следовательно, у нее существует ряд Фурье. Производная функции f

$$(\ln(1 + 2r\cos x + r^2))'_x = -\frac{2r\sin x}{1 + 2r\cos x + r^2}$$

также является непрерывной на всей действительной оси функцией и для нее нам уже известно ее разложение в ряд Фурье (см. (55.41)):

$$(\ln(1 + 2r\cos x + r^2))'_x = -2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} r^n \sin nx.$$

Отсюда, согласно теореме 15, следует, что

$$\ln(1 + 2r\cos x + r^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{r^n}{n} \cos nx + C.$$

Положив $x = 0$, получим

$$\ln(1 + r) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{r^n}{n} + C,$$

откуда, согласно разложению логарифма в ряд Тейлора при $|r| < 1$, имеем $C = 0$.

Таким образом, мы получили разложение

$$\ln(1 + 2r\cos x + r^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{r^n}{n} \cos nx, \; |r| < 1. \qquad (55.83)$$

Заметим, что эта формула справедлива и при $r = 1$, если только $x \neq (2n + 1)\,\frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, так как

$$\ln (1 + 2r \cos x + r^2)\big|_{r = 1} = \ln 2(1 + \cos x) = 2 \ln 2\, |\cos (x/2)|,$$

а для этой функции было получено раньше разложение (см. (55.35)), совпадающее с (55.83) при $r = 1$.

В случае $r = -1$ ряд, стоящий в правой части формулы (55.83), расходится при $x = 0$.

55.12. Ряды Фурье в случае произвольного интервала

Теория тригонометрических рядов Фурье 2π-периодических функций легко переносится и на случай периодических функций с любым периодом $2l$. Для этого достаточно отрезок $[-l, l]$ отобразить на $[-\pi, \pi]$ с помощью линейного отображения:

$$y = \frac{\pi}{l} x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi,$$

тогда вопрос сведется к уже рассмотренному случаю. *Рядом Фурье* функции f с периодом $2l$ по исходной переменной x называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t)dt, \ a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt, \ n = 1, 2, \ldots .$$

В частности, если функция f четная, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а если функция f — нечетная, то

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

55.13. Комплексная запись рядов Фурье

В заключение отметим еще так называемую *комплексную запись* рядов Фурье, часто используемую в математике и ее приложениях. Пусть

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{55.84}$$

Как известно (см. п. 33.6),

$$\cos nx = \frac{1}{2}\,(e^{nxi} + e^{-nxi}), \tag{55.85}$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}\,(e^{nxi} - e^{-nxi}) = \frac{i}{2}\,(e^{-nxi} - e^{nxi}). \tag{55.86}$$

Подставив (55.85) и (55.86) в (55.84), получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,(a_n - b_n i)\, e^{nxi} + \frac{1}{2}\,(a_n + b_n i)\, e^{-nxi}.$$

Полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}\,(a_n - b_n i), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}\,(a_n + b_n i),$$

имеем

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{55.87}$$

где, очевидно, $c_{-n} = \bar{c}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Вспомнив, что $\cos\alpha \pm \pm\, i \sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$ (см. п. 37.6), будем иметь

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\cos nx - i \sin nx)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}dx,^{*}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

или, объединив обе формулы и добавив случай $n = 0$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{55.88}$$

Подставив (55.88) в (55.87), получим

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}dt. \tag{55.89}$$

---

* Определение интеграла от комплекснозначной функции действительного аргумента см. в п. 54.6.

Итак, мы записали ряд Фурье в комплексной форме и нашли соответствующие выражения для его коэффициентов. Требует разъяснения лишь понятие сходимости ряда вида (55.87).

Частичной суммой порядка n ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \qquad (55.90)$$

называется сумма $S_n = \sum_{k=-n}^{n} z_k$. Ряд (55.89) называется сходящимся, если существует $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, при этом S называют суммой ряда и пишут $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n$.

55.14. Разложение логарифма в степенной ряд в комплексной области

С помощью разложений в ряды Фурье функций $\ln(1 + 2r\cos x + r^2)$ и $\operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$ (см. (55.83) и (55.42)) можно получить разложение функции $\ln(1 + z)$, $|z| \leqslant 1$, $z \neq -1$, в степенной ряд в комплексной области, которое было приведено в п. 33.6 без доказательства:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| \leqslant 1,\ z \neq -1. \qquad (55.91)$$

Действительно, в п. 33.6 было показано, что из определения логарифма как функции, обратной показательной функции e^z, следует, что при условии $|z| \leqslant 1$, $z \neq -1$, имеет место равенство

$$\ln(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z), \qquad (55.92)$$

где $-\pi < \arg(1 + z) \leqslant \pi$.

Ясно, что все точки $1 + z$ лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости и $z + 1 \neq 0$, поэтому значение $\arg(1 + z)$ находится в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ (рис. 8), т. е.

$$\arg(1+z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad (55.93)$$

если $1 + z = x + iy$.

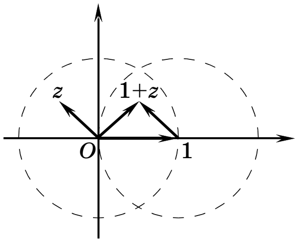


Рис. 8

Положим

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi); \qquad (55.94)$$

тогда из условий $|z| \leqslant 1$, $z \neq -1$ следует, что $0 \leqslant r \leqslant 1$, причем если $r = 1$, то $\varphi \neq (2m + 1)\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Заметив, что

$$|1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)| = \sqrt{1 + 2r\cos\varphi + r^2} \qquad (55.95)$$

и что

$$\arg(1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) \underset{(55.93)}{=} \operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1 + r\cos\varphi}, \qquad (55.96)$$

из (55.92) получим

$$\ln(1 + z) \underset{(55.92)}{=} \ln|1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)| +$$

$$+ i\arg(1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) \underset{\substack{(55.95),\\(55.96)}}{=} \frac{1}{2}\ln(1 + 2r\cos\varphi + r^2) +$$

$$+ i\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1 + 2\cos\varphi} \underset{\substack{(55.42),\\(55.83)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\cos n\varphi +$$

$$+ i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\sin n\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(re^{i\varphi})^n}{n} \underset{(55.94)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.$$

Формула (55.91) доказана.

55.15. Суммирование тригонометрических рядов

До сих пор мы для заданной функции находили ее разложение в тригонометрический ряд — ряд Фурье. Рассмотрим теперь обратную задачу: найти сумму заданного тригонометрического ряда. Иногда это удается сделать, сведя заданный тригонометрический ряд к степенно́му, сумма которого уже известна. Идея этого метода состоит в следующем: если ряды

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n\cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n\sin nx \qquad (55.97)$$

сходятся на отрезке $[-\pi, \pi]$, кроме, быть может, конечного множества точек, то тем же свойством обладает и степенной ряд

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n\cos nx + i\sum_{n=1}^{\infty} p_n\sin nx = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n, \qquad (55.98)$$

$$z = \cos x + i\sin x = e^{ix}.$$

Из того, что этот ряд сходится в некоторых точках единичной окружности $|z| = 1$, следует, в силу первой теоремы Абеля, что он сходится в открытом круге $|z| < 1$ (см. п. 37.1), а поэтому его сумма

$$f(z) = f(re^{ix}) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n, \quad z = re^{ix}, \qquad (55.99)$$

при $|z| = r < 1$ является аналитической функцией.

Для тех точек $x \in [-\pi, \pi]$, в которых ряды (55.97) сходятся, положим

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos nx, \quad v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin nx. \qquad (55.100)$$

Согласно второй теореме Абеля, для указанных x ряд (55.99) равномерно сходится при $0 \leqslant r \leqslant 1$, и, следовательно, функция $f(re^{ix})$, $0 \leqslant r < 1$, как функция переменного r непрерывно продолжаема на весь отрезок $[0, 1]$, т. е. для нее существует предел $\lim\limits_{r \to 1-0} f(re^{ix})$; обозначив этот предел $f(e^{ix})$, получим

$$u(x) + iv(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx} = \lim_{r \to 1-0} f(re^{ix}) = f(e^{ix}). \qquad (55.101)$$

Когда удается найти функцию f в явном виде, т. е. выразить ее через элементарные функции, и вычислить ее значение, стоящее в правой части равенства (55.101), то тем самым удается найти и суммы рядов (55.100). Действительно, суммой первого ряда является действительная часть правой части равенства (55.101), а суммой второго ряда — его мнимая часть.

Пример. Найдем сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}. \qquad (55.102)$$

Этот ряд сходится для всех $x \neq 2\pi m$ и расходится при $x = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (см. (30.88) в п. 30.13). Все его члены, а следовательно, и его сумма — периодические периода 2π функции, поэтому достаточно сумму ряда (55.102) найти только для $x \in (0, 2\pi)$.

Наряду с рядом (55.102) рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \qquad (55.103)$$

Этот ряд сходится на всей числовой оси (см. (30.87) в п. 30.13).

В данном случае для функции (55.99) имеем

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\cos nx + i \sin nx) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \underset{(55.91)}{=} -\ln(1 - z) = \ln \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

Следовательно, обозначая сумму ряда (55.102) через $u(x)$, а сумму ряда (55.103) через $v(x)$, при $z = e^{ix}$ получим

$$u(x) + iv(x) = \ln \frac{1}{1 - e^{ix}}, \quad 0 < x < 2\pi. \qquad (55.104)$$

Заметив, что $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, преобразуем выражение, стоящее под знаком логарифма, следующим образом:

$$\frac{1}{1-e^{ix}} = \frac{1}{(1-\cos x) - i\sin x} = \frac{1}{2\sin^2(x/2) - 2i\sin(x/2)\cos(x/2)} =$$

$$= \frac{1}{2\sin(x/2)} \frac{1}{\sin(x/2) - i\cos(x/2)} =$$

$$= \frac{1}{2\sin(x/2)}(\sin(x/2) + i\cos(x/2)) =$$

$$= \frac{1}{2\sin(x/2)}[\cos(\pi/2 - x/2) + i\sin(\pi/2 - x/2)]. \quad (55.105)$$

Из неравенства $0 < x < 2\pi$ следует, во-первых, что $0 < x/2 < \pi$, а поэтому $\sin x/2 > 0$, и, во-вторых, что $-\pi/2 < \pi/2 - x/2 < \pi/2$, следовательно,

$$\left|\frac{1}{1-e^{ix}}\right| = \frac{1}{2\sin(x/2)}, \ \arg\frac{1}{1-e^{ix}} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (55.106)$$

Таким образом,

$$\ln\frac{1}{1-e^{ix}} = \ln\left|\frac{1}{1-e^{ix}}\right| + i\arg\frac{1}{1-e^{ix}} \underset{(55.106)}{=} -\ln 2\sin(x/2) + i\frac{\pi - x}{2}.$$

Из (55.105) и (55.106) имеем

$$u(x) + iv(x) \underset{(55.104)}{=} -\ln 2\sin(x/2) + i\frac{\pi - x}{2}.$$

Отсюда сразу находится сумма ряда (55.102):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = u(x) = -\ln 2\sin(x/2), \quad x \neq 2\pi m, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Заодно мы доказали, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = v(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < 2\pi$. Это разложение было получено ранее другим способом (см. (55.30)).

§ 56
Интеграл Фурье и преобразование Фурье

56.1. Представление функций в виде интеграла Фурье

Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси. Напишем для нее интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]dy, \quad (56.1)$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos yt dt, \qquad (56.2)$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin yt dt. \qquad (56.3)$$

Формулы (56.2) и (56.3) напоминают формулы для коэффициентов Фурье.

Определение 1. *Интеграл* (56.1) *называется интегралом Фурье функции* f.

Подставляя (56.2) и (56.3) в интеграл (56.1), преобразуем его следующим образом:

$$\int_{0}^{+\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty \cos xy +$$

$$+ \sin ty \sin xy) dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt. \qquad (56.4)$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях равна самой функции, интеграл Фурье также представляет исходную функцию. Прежде чем это доказывать, докажем два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1. *Для любой функции* f, *абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном промежутке с концами* a *и* b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая финитная непрерывная функция* g, *что*

$$\int_{a}^{b} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon, \quad \operatorname{supp} g(x) \subset (a, b). \qquad (56.5)$$

Доказательство. Нам уже известно (см. лемму 2 в п. 55.2), что для любой функции f, указанной в формулировке леммы, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая функция φ, что

$$\int_{a}^{b} |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon, \quad \operatorname{supp} \varphi \subset (a, b). \qquad (56.6)$$

Как всякая ступенчатая функция, она является конечной линейной комбинацией характеристических функций χ_i полуинтервалов $[\xi_i, \eta_i)$, при этом $[\xi, \eta] \subset (a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i(x), \qquad (56.7)$$

где λ_i — числа.

Поэтому если мы докажем, что для каждой функции χ_i существуют такие непрерывные финитные функции g_i, что

$$\operatorname{supp} g_i \subset (\xi_i, \eta_i) \subset (a, b) \tag{56.8}$$

и

$$\int_{\xi_i}^{\eta_i} |\chi_i(x) - g_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{56.9}$$

то, положив

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x), \tag{56.10}$$

$$\lambda \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \tag{56.11}$$

будем иметь

$$\int_a^b |\varphi(x) - g(x)| dx \underset{\substack{(56.7),\\(56.10)}}{=} \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \int_{\xi_i}^{\eta_i} |\chi_i(x) - g_i(x)| dx \underset{(56.9)}{<} \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \underset{(56.11)}{=} \lambda\, \varepsilon. \tag{56.12}$$

Из неравенств (56.6) и (56.12) следует, что

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |[f(x) - \varphi(x)] + [\varphi(x) - g(x)]| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \int_a^b |[\varphi(x) - g(x)]| dx \underset{\substack{(56.6),\\(56.12)}}{<} (\lambda + 1)\varepsilon. \tag{56.13}$$

Кроме того, из соотношений (56.8) и (56.10) вытекает, что

$$\operatorname{supp} g \subset (a, b). \tag{56.14}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, условия (56.13) и (56.14) равносильны условиям (56.5).

Итак, достаточно доказать утверждение леммы для характеристических функций конечных полуинтервалов.

Пусть $\varepsilon > 0$, χ — характеристическая функция полуинтервала $[\xi, \eta)$, $-\infty \leqslant a < \xi < \eta < b \leqslant +\infty$. Рассмотрим непрерывную на всей числовой оси функцию $g(x)$, график которой изображен на рис. 9:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant \xi \text{ или } x \geqslant \eta, \\ (x - \xi)/\delta, & \text{если } \xi < x < \xi + \delta, \\ 1, & \text{если } \xi + \delta \leqslant x \leqslant \eta - \delta, \\ (\eta - x)/\delta, & \text{если } \eta - \delta < x < \eta. \end{cases}$$

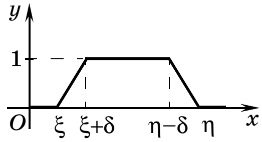


Рис. 9

Для этой функции

$$\operatorname{supp} g \subset (\xi, \eta), \tag{56.15}$$

т. е. функция g — финитная с носителем в интервале (ξ, η) и для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \chi(x) - g(x) \leqslant 1. \tag{56.16}$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right\}; \tag{56.17}$$

тогда получим

$$\int_a^b |\chi(x) - g(x)|dx \underset{(56.15)}{=} \int_\xi^\eta |\chi(x) - g(x)|dx = \int_\xi^{\xi+\delta} (\chi(x) - g(x))dx +$$

$$+ \int_{\eta-\delta}^{\eta} (\chi(x) - g(x))\, dx \underset{(56.16)}{\leqslant} \int_\xi^{\xi+\delta} dx + \int_{\eta-\delta}^{\eta} dx = 2\delta \underset{(56.17)}{<} \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

ЛЕММА 2. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, а функция $\varphi(x, y)$ непрерывна и ограничена в полосе*

$$\Pi = \{(x, y):\ -\infty < x < +\infty,\ \ c \leqslant y \leqslant d\},\ \ -\infty < c < d < +\infty,$$

то:

1) *интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi\, (x, y)dx$ является непрерывной на отрезке $[c, d]$ функцией параметра y*;

2) $$\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x, y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \int_c^d \varphi(x, y)dy. \tag{56.18}$$

Доказательство. Покажем непрерывность интеграла

$$\Phi(y) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x, y)dx, \tag{56.19}$$

зависящего от параметра $y \in [c, d]$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. В силу ограниченности функции $\varphi(x, y)$, в полосе Π существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $(x, y) \in \Pi$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x, y)| \leqslant M \tag{56.20}$$

и, следовательно,

$$|f(x)\, \varphi(x, y)| \leqslant M\, |f(x)|. \tag{56.21}$$

Согласно условию леммы, функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, поэтому, во-первых, существует такое число $\eta_\varepsilon > 0$, что выполняется неравенство

$$\int_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3M}, \tag{56.22}$$

и, во-вторых, из неравенства (56.21), в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов следует, что интеграл (56.19) равномерно сходится на отрезке $[c, d]$, отсюда, в частности, явствует, что функция $\Phi(y)$ определена на отрезке $[c, d]$.

Функция $\varphi(x, y)$, будучи непрерывной функцией на конечном прямоугольнике

$$\Pi_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \{(x, y):\ \ -\eta_\varepsilon \leqslant x \leqslant -\eta_\varepsilon,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

равномерно непрерывна на нем. Поэтому существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех δ, удовлетворяющих неравенству

$$0 < \delta < \delta_\varepsilon,$$

будет выполняться неравенство

$$\omega(\delta; \varphi) < \frac{\varepsilon}{3\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx}, \tag{56.23}$$

где $\omega(\delta; \varphi)$ — модуль непрерывности функции φ на прямоугольнике Π_ε. Зафиксируем какое-либо $\delta > 0$, удовлетворяющее условию (56.23). Теперь при произвольно выбранных $y \in [c, d]$ и $y + \Delta y \in [c, d]$, лишь бы выполнялось условие

$$|\Delta y| < \delta, \tag{56.24}$$

будем иметь

$$|\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)| \underset{(56.19)}{\leqslant} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)[\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)]|\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\eta_\varepsilon}^{\eta_\varepsilon} |f(x)||\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)||\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta; \varphi) \int\limits_{-\eta_\varepsilon}^{\eta_\varepsilon} |f(x)|\,dx + \int\limits_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)|[|\varphi(x, y + \Delta y)| + |\varphi(x, y)|]\,dx =$$

$$= \omega(\delta; \varphi) \int\limits_{-\eta_\varepsilon}^{\eta_\varepsilon} |f(x)|\,dx + \int\limits_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)\,\varphi(x, y + \Delta y)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)\varphi(x, y)|\,dx \underset{\substack{(56.24),(56.23),\\ (56.22),(56.20)}}{<} \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Это и означает, что функция $\Phi(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.

Докажем теперь формулу (56.18). Прежде всего заметим, что, в силу доказанной непрерывности функции (56.19), интег-

рал в левой части равенства (56.18) существует (как интеграл от непрерывной функции по отрезку). Существование интеграла в правой части равенства (56.18) следует из того, что функция

$$\Psi(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) \int_c^d \varphi(x, y)dy$$

является произведением абсолютно интегрируемой на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ функции $f(x)$ на непрерывную ограниченную на $\boldsymbol{R}$ функцию $\int_c^d \varphi(x, y)dy$ параметра x (см. п. 29.5). Здесь непрерывность собственного интеграла $\int_c^d \varphi(x, y)dy$ по параметру x следует из теоремы 1 п. 53.1, а его ограниченность — из ограниченности функции φ:

$$\left|\int_c^d \varphi(x, y)dy\right| \leqslant \int_c^d |\varphi(x, y)|dy \underset{(56.21)}{\leqslant} M(d - c).$$

Далее, в силу леммы 1, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная финитная функция f_ε, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|dx < \varepsilon. \tag{56.25}$$

Для этой функции, согласно теореме 3 п. 53.1, справедлива формула

$$\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x, y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)dx \int_c^d \varphi(x, y)dy \tag{56.26}$$

(здесь, в силу финитности функции g, можно бесконечные пределы заменить конечными, поэтому здесь и применима теорема 3 из п. 53.1).

Покажем, что предел левой части равенства (56.26) при $\varepsilon \to 0$ равен $\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x, y)dx$, а правой $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \int_c^d \varphi(x, y)dy$. Для этого оценим отклонения левой и правой частей равенства (56.26) от их предполагаемых предельных значений. Имеем

$$\left|\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x, y)dx - \int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x, y)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)||\varphi(x, y)|dx \underset{(56.20)}{\leqslant} M \int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|dx =$$

$$= M(d - c) \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|dx \underset{(56.25)}{<} M(d - c)\varepsilon. \tag{56.27}$$

Соответственно для правой части имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)dx \int\limits_c^d \varphi(x, y)dy - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \int\limits_c^d \varphi(x, y)dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|dx \int\limits_c^d |\varphi(x, y)|dy \underset{(56.20)}{\leqslant} M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|dx \int\limits_c^d dy =$$

$$= M(d-c) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - f(x)|dx \underset{(56.25)}{<} M(d-c)\varepsilon. \quad (56.28)$$

Полагая в (56.26) $\varepsilon \to 0$, получим, в силу (56.27) и (56.28), равенство (56.18). □

ТЕОРЕМА 1. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$, то в каждой точке $x \in \boldsymbol{R}$, в которой существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (56.29)$$

Эта формула называется *формулой Фурье*.

Доказательство. Зафиксируем произвольно точку $x \in \boldsymbol{R}$, в которой существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, и рассмотрим интеграл

$$S(\eta) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\eta} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt. \quad (56.30)$$

Функция $S(\eta)$ является для интеграла Фурье аналогом частичной суммы ряда Фурье периодической функции.

Так как функция $\cos y(x-t)$ непрерывна и ограничена на всей плоскости переменных y и t, то, согласно формуле (56.18), в интеграле (56.30) можно поменять порядок интегрирования.

Проделав это, получим

$$S(\eta) \underset{\substack{(56.30),\\(56.18)}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \int\limits_0^{\eta} \cos y(x-t)dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin \eta(x-t)}{x-t}dt \underset{u=t-x}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\frac{\sin \eta u}{u}du. \quad (56.31)$$

Получившаяся формула является аналогом формулы, выражающей частичную сумму ряда Фурье с помощью интеграла Дирихле (см. (55.17)). Поэтому естественно попробовать провести дальнейшие рассуждения по той же схеме, которая применялась в рядах Фурье при доказательстве теоремы 4 в п. 55.4.

Представим интеграл

$$S(\eta) \underset{(56.31)}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\frac{\sin \eta u}{u}\, du$$

в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} = \int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}.$$

Выполнив в первом из них замену $u = -t$, получим

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin \eta t}{t}\, dt.$$

Вспоминая (см. п. 54.4), что при $\eta > 0$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \eta t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2},$$

получим

$$S(\eta) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin \eta t}{t}\, dt -$$

$$- [f(x+0) + f(x-0)]\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \eta t}{t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin \eta t dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \sin \eta t dt. \qquad (56.32)$$

Рассмотрим, например, первый интеграл в правой части этого равенства. Разобьем его на два интеграла:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} = \int\limits_{0}^{1} + \int\limits_{1}^{\infty}.$$

Так как

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'_{+}(x),$$

то $\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ является абсолютно интегрируемой функцией переменной t на отрезке $[0, 1]$, поэтому, в силу теоремы 2 из п.55.2,

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin \eta t dt = 0. \qquad (56.33)$$

Функция $\frac{f(x+t)}{t}$ также абсолютно интегрируема на любом отрезке полуоси $t \geqslant 1$ и так как

$$\left|\frac{f(x+t)}{t}\right| \leqslant |f(x+t)|,$$

то

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x+t)}{t}\right|dt \leqslant \int_1^{+\infty}|f(x+t)|dt = \int_{x+1}^{+\infty}|f(s)|ds \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|ds < +\infty,$$

т. е. $\frac{f(x+t)}{t}$ абсолютно интегрируема на этой полуоси и, следовательно, в силу той же теоремы,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{f(x+t)}{t}\sin\eta t dt = 0. \qquad (56.34)$$

Наконец, из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dt$ (см. п. 29.6), выполняя замену переменного $u = \eta t$, получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{f(x+0)}{t}\sin\eta t dt = f(x+0)\lim_{\eta\to+\infty}\int_\eta^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = 0. \quad (56.35)$$

Из (56.33), (56.34) и (56.35) следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t dt = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t dt = 0.$$

Отсюда, в силу (56.32), получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty}S(\eta) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Предел в левой части равенства, равен интегралу Фурье (56.4), поэтому равенство (56.29) доказано. □

Требования, накладываемые на функцию в этой теореме, можно ослабить, потребовав, например, чтобы функция была абсолютно интегрируемой на всей числовой оси и удовлетворяла в каждой точке обобщенному условию Гельдера. Мы не стали этого делать ради некоторого упрощения доказательства (ср. с доказательством теоремы 4 и ее следствий в п. 55.4).

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что если функция f в дополнение к наложенным на нее в теореме 1 ограничениям является четной или нечетной, то справедливы формулы для четной функции

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos yx dy\int_0^{+\infty}f(t)\cos yt dt,$$

для нечетной

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin yx dy\int_0^{+\infty}f(t)\sin yt dt.$$

Пример. Представим интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } |x| \leqslant 1, \\ 0, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$$

Функция f — четная, поэтому (см. (56.3)) $b(y) = 0$. Найдем функцию $a(y)$:

$$a(y) \underset{(54.2)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ytdt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \cos ytdt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} \cos ytdt = \frac{2}{\pi} \frac{\sin y}{y}.$$

Согласно (56.1), (56.4) и теореме 1, имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \cos xydy = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 1/2, & \text{если } |x| = 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, с помощью теоремы 1 удается вычислить значение интеграла, стоящего в левой части полученного равенства. В частности, при $x = 1$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{2\sin y \cos y}{y} dy = \frac{1}{2}$$

или при $t = 2y$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что эта формула была использована при доказательстве теоремы 1. Ранее она была получена другим методом (см. п. 54.4).

56.2. Различные виды записи формулы Фурье

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ и во всех ее точках непрерывна и имеет односторонние производные.

В этом случае для всех $x \in \boldsymbol{R}$, согласно теореме 1, справедлива формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x - t)dt,$$

и так как подынтегральная функция четная относительно переменной y, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x - t)dt. \qquad (56.36)$$

В силу очевидного неравенства

$$|f(t) \sin y(x - t)| \leqslant |f(t)|,$$

при ограничениях, наложенных на функцию f, существует также интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)|dt,$$

причем, в силу признака Вейерштрасса (см. п. 54.1), он равномерно сходится на всей числовой оси переменного y и, следовательно, является непрерывной функцией от y. Поэтому для любого числа η существует интеграл

$$\int\limits_{-\eta}^{\eta} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)dt, \tag{56.37}$$

причем в силу нечетности подынтегральной функции относительно переменной y этот интеграл равен нулю. Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать существование несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)dt. \tag{56.38}$$

Чтобы получить нужные формулы, придется ввести еще одно обобщение понятия интеграла.

56.3. Главное значение интеграла

Определение 2. *Пусть функция* φ *интегрируема (в собственном или несобственном смысле) на любом конечном отрезке. Если существует конечный предел*

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx,\ \eta>0,$$

то он называется главным значением интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ *и обозначается буквами* $v.\,p.$*

$$v.\,p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx. \tag{56.39}$$

Подчеркнем, что отличие этого определения от определения несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$, п. 29.1, состоит в том, что там для функции φ, интегрируемой на любом ко-

* Главное значение — от франц. valeur principale.

нечном отрезке, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$ определялся как предел интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)dx$ при независимом стремлении ξ к $-\infty$ и η к $+\infty$. Здесь же требуется существование лишь предела указанных интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)dx$ для частного случая, когда $\xi = -\eta$ и $\eta \to +\infty$.

Подобным же образом определяется и главное значение несобственного интеграла в точке: пусть $a < c < b$ и функция φ при любом $\varepsilon > 0$ интегрируема, по Риману, на отрезках $[a, c - \varepsilon]$ и $[c + \varepsilon, b]$ (естественно, предполагается также, что $a < c - \varepsilon$ и $c + \varepsilon < b$); тогда главное значение интеграла $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx$ в точке c определяется формулой

$$v.\,p. \int\limits_{a}^{b} \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} \varphi(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} \varphi(x)dx \right].$$

Иногда, там, где это не может привести к недоразумениям, интеграл в смысле главного значения обозначается просто символом интеграла без букв $v.\,p.$

Если для некоторой функции существует конечный несобственный интеграл, то у этой функции существует и главное значение интеграла и оно совпадает с ее несобственным интегралом. Обратное неверно: у функции может существовать (и, следовательно, быть конечным) главное значение интеграла, а несобственный интеграл быть расходящимся.

Например, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$ и $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существуют как несобственные, однако существуют в смысле главного значения, которое в обоих случаях равно нулю.

56.4. Комплексная запись интеграла Фурье

Вернемся к формуле Фурье (56.29) и запишем ее, используя понятие главного значения интеграла, в другом виде. В силу нечетности по y подынтегральной функции в интеграле (56.38) имеем, согласно сформулированному определению главного значения интеграла,

$$v.\,p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y\,(x - t)dt = 0. \tag{56.40}$$

Умножив обе части этого равенства на $\frac{i}{2\pi}$ и сложив с интегралом (56.36), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(x-t)} dt, \qquad (56.41)$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (56.19) и называется *комплексной записью интеграла Фурье*.

56.5. Преобразование Фурье

Если положить

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt,$$

то формула (56.19) примет вид

$$f(x) = v.\, p.\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\, e^{ixy} dy. \qquad (56.42)$$

Определение 3. *Функция* Φ, *которая ставится в соответствие функции* f *формулой*

$$\Phi(y) = v.\, p.\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt, \qquad (56.43)$$

называется преобразованием Фурье функции f *и обозначается* $F[f]$ *или* $\hat{f}$.

В этом определении $f(t)$, вообще говоря, комплекснозначная функция действительного аргумента. Отметим, что функция $\Phi = F[f]$ может принимать существенно комплексные значения и в том случае, когда функция принимает только действительные значения.

Преобразование Фурье определено, в частности, для всех абсолютно интегрируемых функций. Употребив, например, для преобразования Фурье функции f обозначение $\hat{f}$, формулу (56.42) можно записать в виде

$$f(x) = v.\, p.\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy} dy. \qquad (56.44)$$

Эта формула позволяет восстановить саму функцию f, если известно ее преобразование Фурье $\hat{f}$. Она называется *формулой обращения*.

Определение 4. *Функция* ψ, *которая ставится в соответствие функции* f *формулой*

$$\psi(y) = v.\,p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iyt} dt, \qquad (56.45)$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f *и обозначается* $F^{-1}[f]$.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определены на множестве функций, для которых интегралы (56.43) и (56.45) существуют в смысле главного значения. Это множество содержит в себе, в частности, множество всех абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, для которых интегралы в формулах (56.43) и (56.45) можно понимать как обычные несобственные интегралы, а не только как интегралы в смысле главного значения. Термин «обратное преобразование Фурье» оправдывается тем, что преобразование F^{-1} обращает преобразование Фурье F. Более точно, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Если непрерывная абсолютно интегрируемая на всей оси функция* f *имеет в каждой точке конечные односторонние производные, то*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Первая формула обращения, т. е. формула $F^{-1}[f]] = f$, является просто другой записью уже доказанной формулы (56.41).

Покажем справедливость второй формулы обращения. Поскольку косинус — четная функция, то в (56.36) можно переставить местами t и x:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y\,(t - x) dt,$$

в силу же нечетности синуса (ср. с (56.40))

$$v.\,p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y\,(t - x) dt = 0.$$

Поэтому наряду с формулой (56.41) также имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(t-x)} dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ity} dt \right] e^{-ixy} dy,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Эту формулу можно переписать в виде

$$F[F^{-1}[f]] = f. \ \square$$

ЛЕММА 4. *Пусть для функций* f_1 *и* f_2 *существует преобразование Фурье* (*соответственно обратное преобразование Фурье*). *Тогда, каковы бы ни были числа* λ_1 *и* λ_2, *для функции* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *также существует преобразование Фурье* (*соответственно обратное ему*), *причем*

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2]$$

(*соответственно* $F^{-1}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F^{-1}[f_1] + \lambda_2 F^{-1}[f_2]$).

Это свойство называется *линейностью преобразования* Фурье (соответственно обратного преобразования Фурье). Оно непосредственно следует из линейности интеграла и из формул (56.43) и (56.45).

СЛЕДСТВИЕ. $F[0] = F^{-1}[0] = 0$.

Действительно, например

$$F[0] = F[0 \cdot 0] = 0 \cdot F[0] = 0.$$

Впрочем, это свойство следует, конечно, сразу и из формул (56.43) и (56.45).

ЛЕММА 5. *Преобразование Фурье* F, *так же как и обратное преобразование Фурье* F^{-1}, *являются линейными взаимно-однозначными отображениями множества непрерывных абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные, во множество функций, для которых интегралы* (56.43) *и* (56.45) *существуют в смысле главного значения.*

Доказательство. Достаточно доказать лишь взаимную однозначность отображений F и F^{-1} — остальное уже доказано выше. Докажем, например, взаимную однозначность отображения F. Пусть $F[f_1] = F[f_2]$; тогда

$$F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]].$$

Отсюда, согласно лемме 1, следует, что

$$f_1 = f_2. \square$$

Преобразование Фурье во всяком случае определено для абсолютно интегрируемых функций. В следующих пунктах будут изучаться свойства этого преобразования. В дальнейшем же будет показано, как преобразование Фурье обобщается на более широкие классы функций, а именно на функции с интегрируемым квадратом (п. 60.9*) и на так называемые обобщенные функции (п. 61.7).

56.6. Интегралы Лапласа

Найдем преобразование Фурье четного продолжения функции e^{-ax}, $a > 0$, с полупрямой $x \geqslant 0$ на всю числовую прямую, т. е., попросту говоря, преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-a|x|}$, $-\infty < x < +\infty$:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-ixy} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{-ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(a-iy)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+iy)x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a - iy} + \frac{1}{a + iy} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + y^2}.$$

Применение обратного преобразования Фурье к полученной функции дает исходную функцию

$$e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + y^2} e^{ixy} dy, \quad x \geqslant 0.$$

Вспоминая, что $e^{ixy} = \cos xy + i \sin xy$ и замечая, что, в силу нечетности подынтегральной функции, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xy}{a^2 + y^2} dy = 0$, получим

$$e^{-ax} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} dy = \frac{2a}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} dy, \quad x \geqslant 0.$$

Найдем теперь преобразование Фурье $\hat{f}$ нечетного продолжения функции e^{-ax}, $a > 0$, с положительной полуоси $x > 0$, т. е. преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при} \quad x > 0, \\ -e^{ax} & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} (-e^{ax}) e^{-ixy} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{-ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{a - iy} + \frac{1}{a + iy} \right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2 + y^2} i.$$

Применив снова формулу обращения преобразования Фурье, получим

$$e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2 + y^2} i \right) e^{ixy} dy = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{y \sin xy}{a^2 + y^2} dy, \quad x > 0.$$

Итак, нам не только удалось найти преобразование Фурье рассматриваемых функций, но и получить сразу из формулы обращения (56.44) значения двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}, \quad x \geqslant 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{y \sin xy}{a^2+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}e^{-ax}, \quad x > 0.$$

Эти интегралы называются *интегралами Лапласа*.

56.7. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций

В этом и следующих пунктах будут рассмотрены некоторые свойства преобразования Фурье функции f, которое, как и выше, будем обозначать через $\hat{f}$ или $F[f]$. При этом предполагаем, что функция f принимает, вообще говоря, комплексные значения, а ее аргумент, как всегда, действителен.

ТЕОРЕМА 2. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$, то ее преобразование Фурье Ff ограничено и непрерывно на $\boldsymbol{R}$, причем*

$$|\hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx, \; \forall\, y \in \boldsymbol{R}, \tag{56.46}$$

$$\lim_{y \to \infty} \hat{f}(y) = 0. \tag{56.47}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если последовательность $\{f_n\}$ абсолютно интегрируемых на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ функций и абсолютно интегрируемая функция f таковы, что*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0, \tag{56.48}$$

то последовательность образов Фурье $\{\hat{f}_n\}$ сходится равномерно на всей числовой оси к $\hat{f}$ — образу Фурье функции f:

$$\hat{f}_n \underset{\boldsymbol{R}}{\rightrightarrows} \hat{f}.$$

Доказательство теоремы. Заметим, что рассматриваемые в теореме функции принимают, вообще говоря, комплексные значения.

Для доказательства неравенства (56.46) заметим, что $|e^{-ixy}| = 1$, и поэтому

$$|\hat{f}(y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)e^{-ixy}|\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Неравенство (56.46) доказано.

Для доказательства свойства (56.47) обозначим через u и v соответственно действительную и мнимые части функции f: $f(x) = u(x) + iv(x)$. Имеем

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) + iv(t))(\cos yt - i\sin yt)dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t)\cos yt + v(t)\sin yt)dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t)\sin yt - v(t)\cos yt)dt.$$

Каждый из интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u(t)\cos yt + v(t)\sin yt)dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t)\sin yt - v(t)\cos yt)dt,$$

в силу леммы 2 (см. п. 56.1), является непрерывной функцией (так как функции $u(t)$ и $v(t)$ абсолютно интегрируемы, а функции $\cos yt$ и $\sin yt$ ограничены и непрерывны) и стремится к нулю в силу теоремы Римана (см. теорему 2 в п. 55.2) при $y \to \infty$.

Таким образом, мнимая и действительная части функции непрерывны и стремятся к нулю при $y \to \infty$; следовательно, эти свойства присущи и самой функции f. Теорема доказана. □

Следствие вытекает из неравенства (56.46):

$$\left|(F[f_n])(y) - (F[f])(y)\right| = \left|(F[f_n - f])(y)\right| \underset{(56.46)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f_n(x) - f(x)\right|dx. \qquad (56.49)$$

Правая часть этого неравенства по условию стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. (56.48)), поэтому и левая его часть стремится к нулю. При этом, поскольку правая часть неравенства (56.49) не зависит от y, стремление к нулю разности $(F[f_n])(y) - (F[f])(y)$ происходит равномерно на $\boldsymbol{R}$, а это и означает равномерную сходимость на $\boldsymbol{R}$ последовательности $\{(F[f_n]\}$ к функции $F[f]$. □

56.8. Преобразование Фурье производных

ТЕОРЕМА 3. *Если функция f и ее производная f' непрерывны и абсолютно интегрируемы на всей числовой оси*, то

$$F[f'](y) = iyF[f](y). \qquad (56.50)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция f и все ее производные до порядка n включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, $n \geqslant 1$, то*

$$\left|F[f](y)\right| \leqslant \frac{M}{|y|^n}, \qquad (56.51)$$

где

$$M = \sup_{-\infty < y < +\infty} \left|F[f^{(n)}](y)\right| < +\infty.$$

Доказательство. Известно, что из абсолютной сходимости интеграла следует его сходимость. Поэтому из абсолютной интегрируемости функции f и ее производной f' на числовой оси следует сходимость интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)dx.$$

Покажем, что отсюда имеем

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Действительно, из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)dx$ следует, например, существование конечного предела

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f'(t)dt = \int_0^{+\infty} f'(t)dt;$$

тогда из формулы Ньютона—Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

следует и существование конечного предела

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt.$$

Этот предел не может быть отличен от нуля, так как тогда интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ не мог бы быть конечным. Итак, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Применив интегрирование по частям к формуле преобразования Фурье, получим

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}dx = iyF(y)[f].$$

Таким образом, дифференцирование функции приводит к умножению ее преобразования Фурье на множитель iy.

Формула (56.50) доказана.

В условиях следствия из формулы (56.50) по индукции получаем

$$F[f^{(n)}](y) = (iy)^n\, F[f]\,(y).$$

Функция $F[f^{(n)}](y)$ ограничена (см. теорему 2), поэтому верхняя грань $M = \sup\limits_{-\infty<y<+\infty} |F[f^{(n)}](y)|$ конечна и

$$|F[f](y)| = \frac{|F[f^n](y)|}{|y|^n} \leqslant \frac{M}{|y|^n}.$$

Неравенство (56.51) доказано. □

Итак, чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция f, тем быстрее стремится к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.

Заметим, что теорема 2 вместе с ее доказательством остается справедливой и в случае, когда производная на любом отрезке рассматриваемой функции является не непрерывной, а имеет конечное число разрывов первого рода (см п. 5.13) при сохранении остальных предположений.

Действительно, в этом случае указанная производная на любом отрезке является кусочно-непрерывной функцией (см. п. 23.10*) и поэтому проводимое в доказательстве интегрирование по частям законно (см. пп. 26.2 и 29.2).

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что преобразование Фурье $F(y)$ функции

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|^3}$$

равно $O\left(\frac{1}{y^3}\right)$ при $y \to \infty$.

56.9. Свертка и преобразование Фурье

Пусть функции φ и ψ определены на всей действительной оси. В различных вопросах математики часто используется так называемая *свертка функций* φ и ψ, которая обозначается $\varphi*\psi$, или, если x — аргумент свертки, через $(\varphi*\psi)(x)$, и определяется равенством

$$(\varphi*\psi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt. \tag{56.52}$$

Для простоты в этом пункте будем предполагать, что рассматриваемые функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ принимают только действительные значения. Интеграл (56.52) заведомо существует, если обе функции ограничены и абсолютно интегрируемы*. При этом интеграл (56.52) и, более того, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\,\psi(x-t)|\,dt$$

---

* Существование интеграла (56.52) можно гарантировать и при более общих условиях, однако мы на этом не будем здесь останавливаться.

равномерно сходятся на всей действительной оси. В самом деле, в силу ограниченности функции ψ, имеем $|\psi| \leqslant M$, где M — постоянная, поэтому для всех x и t

$$|\varphi(t)\,\psi\,(x-t)| \leqslant M\,|\varphi(t)|$$

и сделанное утверждение, в силу абсолютной интегрируемости функции φ, вытекает из признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов (см. п. 54.1). Из приведенных рассуждений следует также, что если функции φ и ψ ограничены, абсолютно интегрируемы и непрерывны, то и их свертка также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема. Действительно, непрерывность функции f следует из равномерной сходимости интеграла (56.52), а ограниченность — из оценки

$$|(\varphi*\psi)\,(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |(\varphi(t)\,\psi\,(x-t)dt \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt.$$

Докажем абсолютную интегрируемость свертки. Пусть $f = \varphi*\psi$; имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \,\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(t)\,\psi\,(x-t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\,\psi\,(x-t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi\,(t)|dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi\,(x-t)|dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi\,(t)|dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi\,(s)|\,ds. \qquad (56.53)$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того (см. теорему 7 п. 54.3), что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dt$ равномерно сходится на всей оси, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|dx$ равномерно сходится на любом конечном отрезке, а повторный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|dt$, как это следует из последнего равенства формулы (56.53), существует.

Таким образом, при сделанных предположениях к функции $f = \varphi*\psi$ можно, в свою очередь, применять операцию свертки с некоторой непрерывной ограниченной и абсолютно интегрируемой функцией (причем снова получится функция того же класса) или преобразование Фурье.

Операция свертки функций *коммутативна и ассоциативна* в рассматриваемом классе функций. Действительно, выполнив в интеграле (56.52) замену переменного $x - t = s$, получим

$$\varphi*\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-s)\psi(s)ds = \psi*\varphi.$$

Далее, производя в ниже написанном интеграле замену переменного $t = y - \xi$, меняя порядок интегрирования и делая замену $x - y + \xi = \eta$, получим

$$(\varphi * \psi) * \chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(y - x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(y - x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - y + \xi)\chi(y - x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta)\chi(\xi - \eta)d\eta = (\psi * \chi) * \varphi = \varphi * (\psi * \chi).$$

Возможность перестановки порядка интегрирования и в этом случае следует из теоремы 7 п. 54.3. Действительно, исследуем на равномерную сходимость интегралы

$$\chi(y - x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)d\xi, \qquad (56.54)$$

$$\varphi(y - \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - y + \xi)\chi(y - x)dx. \qquad (56.55)$$

В силу ограниченности функций ψ и χ, имеем $|\psi| \leqslant M, |\chi| \leqslant M$, где M — постоянная, и поэтому

$$|\chi(y - x)\varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)| \leqslant M^2|\varphi(y - \xi)|,$$

$$|\varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)\chi(y - x)| \leqslant M^2|\chi(y - x)|.$$

Из этих неравенств и абсолютной интегрируемости функций φ и χ следует, согласно признаку Вейерштрасса, что интегралы (56.54) и (56.55) равномерно сходятся соответственно относительно переменных x и ξ (переменная y фиксирована) на любом конечном отрезке (почему?). Наконец, существует повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(y - x)\varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)|d\xi = (|\varphi| * |\psi|) * |\chi|.$$

Таким образом, все условия указанной теоремы 7 из п. 54.3 выполнены.

Следует заметить, что при рассмотрении сверток функций можно существенно ослабить ограничения, накладываемые на свертываемые функции. Однако доказательство свойств сверток в этом случае потребовало бы прежде всего более тонких теорем о перемене порядка интегрирования. Для простоты изложения мы не стали этого делать.

Займемся теперь изучением преобразования Фурье сверток двух функций. Для удобства видоизменим определение свертки $\varphi*\psi$, добавив дополнительный множитель $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\varphi*\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt.$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы на числовой оси. Тогда*

$$F[\varphi*\psi] = F[\varphi]F[\psi].$$

Доказательство. Функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы, поэтому функция $\varphi*\psi$ обладает теми же свойствами, в частности, она абсолютно интегрируема, и для нее можно рассматривать преобразование Фурье

$$F[\varphi*\psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt.$$

Меняя здесь порядок интегрирования (что возможно в силу теоремы 7 п. 54.3) и производя замену переменного $x = t + s$, получим

$$F[\varphi*\psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t)e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-ity}dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)e^{-isy}ds = F[\varphi]F[\psi],$$

т. е. преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций. □

Теорема 4 также может быть доказана при более слабых ограничениях на рассматриваемые функции, но мы не будем на этом останавливаться.

56.10. Производная преобразования Фурье функции

ТЕОРЕМА 5. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функции $f(x), xf(x), \dots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, то преобразование Фурье функции f является n раз дифференцируемой на всей числовой прямой функцией и*

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], \ k = 0, 1, \dots, n.$$

Доказательство. Пусть сначала функция f принимает только действительные значения. Формально дифференцируя по параметру y интеграл

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

и замечая, что $|xf(x)e^{-ixy}| = |xf(x)|$, получим абсолютно и равномерно сходящийся интеграл

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixy}dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Следовательно (см. п. 54.3, теорему 8), в этом случае преобразование Фурье $F[f]$ функции f является дифференцируемой функцией и

$$iF'[f] = F[xf].$$

Если теперь $f = u + iv$, где u и v — действительные функции, то

$$F'[f] = F'[u + iv] = \{F[u] + iF[v]\}' = F'[u] + iF'[v] =$$
$$= -iF[xu] + F[xv] = -iF[xu + ixv] = -iF[xf].$$

Далее по индукции получаем, что преобразование Фурье $F[f]$ функции f имеет производные до порядка n включительно и $i^kF^{(k)}[f] = F[x^kf]$, $k = 0, 1, \ldots, n$. □

СЛЕДСТВИЕ. *Если предположения теоремы выполнены, то все производные $F^{(k)}[f]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, непрерывны и стремятся к нулю при стремлении их аргумента к бесконечности.*

В силу теорем 2 и 5, следствие непосредственно вытекает из того, что производные $F^{(k)}[f]$ являются преобразованиями Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Можно показать, что если произведения вида $e^{a|x|^\alpha} f(x)$ абсолютно интегрируемы при определенных ограничениях, налагаемых на $a > 0$ и $\alpha > 0$, то это приводит к еще большей гладкости преобразования Фурье, а именно оказывается, что оно принадлежит к тем или иным классам аналитических функций.

Формула, задающая обратное преобразование Фурье, отличается от формулы, задающей прямое преобразование Фурье (см. (56.43) и (56.45)), лишь тем, что в показателе степени у числа e под интегралом i заменено на $-i$, поэтому для обратного преобразования Фурье справедливы свойства, аналогичные доказанным нами для прямого преобразования Фурье.

УПРАЖНЕНИЯ. 3. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$ дважды дифференцируемо на всей числовой прямой.

4. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-|x|}$ бесконечно дифференцируемо на всей числовой прямой.

Глава 8

Функциональные пространства

§ 57

Метрические пространства

57.1. Определения и примеры

Определение 1. *Множество* $X = \{x, y, z, ...\}$ *называется метрическим пространством* X, *если на совокупности упорядоченных пар* (x, y) *элементов этого множества определена неотрицательная функция* $\rho(x, y)$, *называемая расстоянием* (*или метрикой*), *такая, что*:

1^0. $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

2^0. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $x \in X$, $y \in Y$;

3^0. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Условия 1^0, 2^0 и 3^0 называются *аксиомами расстояния*. Аксиома 3^0 называется *неравенством треугольника*.

Элементы метрического пространства называются *точками*.

Примеры. 1. Совокупность всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, если расстояние между действительными числами определить как абсолютную величину их разности: $\rho(x, y) = |x - y|$, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, образует метрическое пространство.

2. Множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$, расстояние между элементами которого задается по формуле $\rho(z, z') = |z - z'|$, $z \in \boldsymbol{C}$, $z' \in \boldsymbol{C}$, также образует метрическое пространство.

3. Евклидово точечное пространство $\boldsymbol{R}^n$ размерности n (см. п. 35.1) является метрическим пространством, если расстояние между его точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определить по формуле (см. (35.1))

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Для множества точек пространства $\boldsymbol{R}^n$ функция $\widetilde{\rho}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ также является метрикой.

4. Пусть E — некоторое множество. Рассмотрим множество всех ограниченных на E функций, принимающих действительные (или комплексные) значения. Для двух таких функций φ и ψ положим

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \psi(t)|. \qquad (57.1)$$

Легко проверяется, что функция $\rho(\varphi, \psi)$ является метрикой. Справедливость свойств расстояния 1^0 и 2^0 ясна непосредственно. Проверим справедливость свойства 3^0. Пусть φ, ψ и χ — ограниченные функции, определенные на множестве E. Для любого элемента $t \in E$ имеем

$$|\varphi(t) - \chi(t)| = |[\varphi(t) - \psi(t)] + [\psi(t) - \chi(t)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(t) - \psi(t)| + |\psi(t) - \chi(t)|,$$

поэтому

$$|\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_E |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_E |\psi(t) - \chi(t)|,$$

откуда

$$\sup_E |\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_E |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_E |\psi(t) - \chi(t)|,$$

т. е.

$$\rho(\varphi, \chi) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

5. Пусть G — измеримое по Жордану открытое множество n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$. Множество X непрерывных на замыкании $\overline{G}$ множества G функций образует метрическое пространство, если расстояние между функциями $\varphi \in X$ и $\psi \in X$ определить по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |(\psi(x) - \varphi(x)| dG.$$

Действительно, если $\rho(\varphi, \psi) = 0$, т. е. $\int |(\psi(x) - \varphi(x)| dG = 0$, то, в силу следствия из свойства 9^0 кратных интегралов (см. п. 44.6), $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in G$ и, следовательно, для всех $x \in \overline{G}$. Свойство 2^0 расстояния в этом случае очевидно, а свойство 3^0 легко проверяется: если φ, ψ и χ непрерывны на $\overline{G}$, то

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |(\varphi(x) - \chi(x)| dG = \int |[(\varphi(x) - \psi(x)] + [(\psi(x) - \chi(x)]| dG \leqslant$$
$$\leqslant \int |(\varphi(x) - \psi(x)| dG + \int |\psi(x) - \chi(x)| dG = \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

В случае $n = 1$, $\overline{G} = [a, b]$ введенная метрика для непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций имеет вид

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |(\varphi(x) - \psi(x)| dx. \qquad (57.2)$$

Естественным образом аналогичное пространство вводится и для функций, определенных на бесконечном промежутке. Например, в случае $a = -\infty$, $b = +\infty$ для двух непрерывных абсолютно интегрируемых на всей числовой оси функций φ и ψ расстояние определяется по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |(\varphi(x) - \psi(x)| dx. \tag{57.3}$$

6. Рассмотрим множество всевозможных последовательностей $x = \{x_n\}$ действительных чисел, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty. \tag{57.4}$$

Каждая такая последовательность будет называться точкой пространства, а числа x_n, $n = 1, 2, \ldots$, — ее координатами. Расстояние между двумя такими точками $x = \{x_n\}$ и $y = \{y_n\}$ определим по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}. \tag{57.5}$$

Это определение имеет смысл, так как из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2$ следует сходимость ряда, стоящего в правой части формулы (57.5).

В самом деле, при любом натуральном m в пространстве $\boldsymbol{R}^m$ для точек $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_m)$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} (x_n - y_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{m} x_n^2 + \sum_{n=1}^{m} y_n^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{m} x_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{m} y_n^2}. \tag{57.6}$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим, что ряд (57.5) сходится и, более того, что

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} (x_n - y_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2}.$$

Свойства расстояния для функции $\rho(x, y)$, определенной формулой (57.5), легко проверяются. Например, неравенство треугольника для нее следует из неравенства треугольника для точек пространства $\boldsymbol{R}^m$: достаточно в нем перейти к пределу при $m \to \infty$.

Метрическое пространство всех действительных последовательностей, удовлетворяющих условию (57.4), с метрикой (57.5) называется *гильбертовым** *пространством последовательностей и обозначается* l_2.

---

* Д. Гильберт (1862—1943) — немецкий математик.

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Проверить аксиомы расстояния для функции $\rho(\varphi, \psi)$, определенной формулой (57.3) для пространства абсолютно интегрируемых непрерывных на всей числовой оси функций.

2. Привести пример последовательности непрерывных функций, сходящейся на некотором отрезке в смысле расстояния (57.2), но не сходящейся на этом отрезке в смысле точечной сходимости (т. е. в смысле определения 3 п. 36.1).

3. Привести пример последовательности, сходящейся на некотором отрезке в смысле точечной сходимости, но не сходящейся на этом отрезке в смысле метрики (57.2).

4. Пусть X — метрическое пространство. Определим отклонение между его двумя подмножествами Y и Z согласно формуле

$$\rho(Y, Z) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{y \in Y, z \in Z} \rho(y, z).$$

Будет ли метрикой функция $\rho(Y, Z)$ на множестве всех подмножеств метрического пространства X?

Всякое подмножество метрического пространства X, в свою очередь, является метрическим пространством относительно той же метрики и называется *подпространством пространства* X.

Определение 2. *Два метрических пространства X и X' с метриками $\rho(x, y)$ и $\rho'(x', y')$ называются изометричными, если между их точками существует взаимно-однозначное соответствие f, сохраняющее расстояние, т. е. такое, что если*

$$x' = f(x), \quad y' = f(y), \quad x \in X, \quad y \in X, \quad x' \in X', \quad y' \in X',$$

то

$$\rho_X(x, y) = \rho_{X'}(x', y')$$

(*такие соответствия также называются изометричными*).

Иногда бывает удобно «отождествить» элементы пространств X и X', соответствующие друг другу при изометричном соответствии пространств X и X'. Поясним более подробно операцию отождествления элементов двух изометрических пространств: X и Y. Пусть X и Y^* — метрические пространства, $Y \subset Y^*$, f: $X \to Y$ — изометричное отображение. Рассмотрим множество $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$, получающееся из пространства X присоединением к нему множества $Y^* \setminus Y$. Таким образом: $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Определим для точек $x \in X^*$ и $y \in X^*$

понятие расстояния $\rho_{X^*}(x, y)$. Для удобства введем отображение $F\colon X^* \to Y^*$, задаваемое формулой

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x)', & \text{если } x \in X, \\ x, & \text{если } x \in X^* \setminus X. \end{cases}$$

Ясно, что F является взаимно-однозначным отображением (биекцией) множества X^* на Y^*.

Теперь для любых $x \in X^*$ и $y \in Y^*$ положим

$$\rho_{X^*}(x, y) = \rho(F(x), F(y)).$$

Легко проверить, что определенная таким образом функция $\rho_{X^*}(x, y)$ удовлетворяет трем аксиомам расстояния и, следовательно, X^* является метрическим пространством, а отображение F изометрично отображает пространство X^* на Y^*, причем при этом отображении множество X переходит в Y.

Под утверждением «отождествим в пространстве Y^* множество X с изометричным ему пространством Y» и понимается рассмотрение пространства X^* вместо Y^*.

Определение 3. *Пусть X — метрическое пространство; последовательность его точек $\{x_n\}$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho\,(x, x_n) = 0$, т. е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho\,(x, x_n) < \varepsilon$. В этом случае пишется $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ или $x_n \to x$ при $n \to \infty$ и говорится, что точка x является пределом данной последовательности.*

Например, в случае примеров 1 и 2 сходимость в рассматриваемых там метрических пространствах означает обычную сходимость числовых (соответственно действительных или комплексных) последовательностей. В примере 3 сходимостью последовательности является сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве, встречавшаяся нам раньше (см. п. 35.1). В метрическом пространстве функций, определенных и ограниченных на некотором множестве, расстояние между которыми определяется формулой (57.1), последовательность функций $\{\varphi_n\}$ сходится к функции φ, если

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| = 0,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к функции φ (см. т. 2, п. 32.2).

Наконец, пример 5 дает вид сходимости последовательности функций в смысле некоторой интегральной метрики. В случае $n = 1$ подобная сходимость уже встречалась в п. 55.2 (лемма 2) и в п. 56.7 (следствие леммы 4).

Для всякого метрического пространства X естественным образом вводится понятие ε-окрестности $U(x, \varepsilon)$ точки $x \in X$, $\varepsilon > 0$: $U(x, \varepsilon) = \{y : y \in X, \rho(y, x) < \varepsilon\}$, а затем дословно, так же как для n-мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$ (см. п. 35.2), вводятся понятия точки прикосновения множества, предельной и изолированной точки, граничной и внутренней точки, замыкания $\overline{A}$ множества A, понятие замкнутого и открытого множества.

Справедливы для произвольных метрических пространств и леммы 3, 4, 5 и 6, доказанные в п. 35.2 для открытых и замкнутых множеств n-мерных евклидовых пространств, причем доказательства, приведенные в п. 35.2, сохраняют свою силу и в общем случае.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Выяснить, какие множества являются ε-окрестностями точек в метрическом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ с метрикой $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

Нетрудно убедиться, что у последовательности метрического пространства может быть только один предел. Допустим противное: пусть у последовательности точек x_n, $n = 1, 2, \ldots$, метрического пространства X точки $a \in X$ и $b \in X$ являются ее пределами и $a \neq b$. Тогда, выбрав ε так, что $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\rho(a, b)$, получим, что окрестности $U(a, \varepsilon)$ и $U(b, \varepsilon)$ не пересекаются и в каждой из них должны лежать все точки данной последовательности, кроме конечного их множества, а это невозможно.

Всякое подмножество метрического пространства является метрическим пространством, поэтому в нем также имеются открытые и замкнутые относительно него множества. Связь между открытыми и замкнутыми множествами всего пространства и открытыми и замкнутыми множествами его подпространства устанавливается следующим предложением.

ЛЕММА 1. *Множество замкнуто* (*открыто*) *в подпространстве метрического пространства тогда и только тогда, когда оно является пересечением подпространства с замкнутым* (*соответственно открытым*) *множеством всего пространства.*

Доказательство. Путь E — подпространство пространства X и F — замкнутое подмножество пространства X. Покажем, что тогда пересечение $E \cap F$ замкнуто в E. Действитель-

но, каждая точка прикосновения множества $E \cap F$, содержащаяся в E, является и точкой прикосновения множества F. Поэтому (в силу замкнутости F) она одновременно содержится и в F, т. е. содержится в пересечении $E \cap F$. Это и означает замкнутость множества $E \cap F$ в подпространстве E.

Наоборот, пусть $E \subset X$ и множество $F \subset E$ замкнуто в E. Если $\bar{F}$ — замыкание множества F во всем пространстве X, то $\bar{F}$ является замкнутым в X множеством, а пересечение $E \cap \bar{F}$ состоит из точек прикосновения множества F, содержащихся в E, которое, в силу замкнутости F в E, совпадает с множеством F, т. е. $F = E \cap \bar{F}$.

Если теперь G — открытое в пространстве X множество, то, в силу леммы 6 п. 35.2, его дополнение $F = X \setminus G$ является замкнутым, а так как $E \cap G = E \setminus (E \cap F)$, где, согласно уже доказанному, пересечение $E \cap F$ замкнуто в E, то, в силу той же леммы, его дополнение в множестве E, т. е. пересечение $E \cap G$, является открытым в подпространстве E множеством.

Наконец, если G — открытое в подпространстве E множество, то его дополнение $F = E \setminus G$ замкнуто в этом подпространстве и поэтому, согласно выше доказанному, $F = E \cap \bar{F}$, тогда $G = E \cap (X \setminus \bar{F})$, где, все в силу той же леммы, множество $X \setminus \bar{F}$ является открытым в пространстве X множеством. □

57.2. Полные пространства

На метрические пространства обобщается понятие фундаментальной последовательности (см. определение 14 в п. 4.7).

Определение 4. *Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

ЛЕММА 2. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она фундаментальная.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ справедливо неравенство $\rho(x, x_n) < \varepsilon/2$. Следовательно, если $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$, то

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \ \square$$

Определение 5. *Метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность его точек сходится к его же точке.*

Очевидно, что метрическое пространство, изометричное полному пространству, также является полным метрическим пространством.

Примеры. 1. Метрические пространства действительных и комплексных чисел являются примерами полных метрических пространств. Полным является и n-мерное евклидово пространство $\boldsymbol{R}^n$ (см. п. 35.1). Рациональные числа дают пример неполного метрического пространства.

2. Рассмотрим метрическое пространство функций, определенных и ограниченных на множестве E, расстояние между которыми определено формулой (57.1). В этом пространстве последовательность функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, является фундаментальной, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и $m > m_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \sup_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости последовательности на множестве E (см. п. 32.2). В силу этого критерия, последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к некоторой функции φ, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \sup_E |\varphi(x) - \varphi_n(x)| = 0. \qquad (57.7)$$

Покажем, что эта функция φ также ограничена и, следовательно, принадлежит рассматриваемому пространству. Действительно, в силу (57.7), для любого числа $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = 1$, существует такой номер n_1, что для всех $n > n_1$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < 1$; поэтому

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_{n_1+1}(x)| + |\varphi_{n_1+1}(x)| < 1 + \sup_E |\varphi_{n_1+1}(x)|.$$

Так как функция φ_{n_1+1} ограничена, то ограничена и функция φ. Мы доказали тем самым, что рассматриваемое пространство функций является полным.

Можно показать, что метрическое пространство функций, рассмотренных в примере 5 п. 57.1, не является полным.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Доказать, что пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, расстояние между которыми определяется по формуле (57.2), не является полным.

Пример 3. Докажем полноту гильбертова пространства l_2 (см. пример 6 в п. 57.1).

Пусть последовательность точек

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \dots), \quad k = 1, 2, \dots, \qquad (57.8)$$

является фундаментальной последовательностью пространства l_2. Тогда из неравенства

$$\rho(x^{(k+p)}, x^{(k)}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2} \geqslant |x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}|,$$
$$k = 1, 2, \dots, p = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots,$$

и фундаментальности последовательности (57.8) следует, что при любом фиксированном n числовая последовательность $x_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет критерию Коши (см. п. 4.7) и, следовательно, сходится. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x_n^{(k)} = x_n$. В силу фундаментальности последовательности (57.8), для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер k_ε, что при любом номере $k > k_\varepsilon$ и любом натуральном p выполняется неравенство

$$\rho(x^{(k+p)}, x^{(k)}) < \varepsilon,$$

т. е.

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2} < \varepsilon.$$

Отсюда для любого фиксированного натурального числа m и подавно

$$\sum_{n=1}^{m} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2 < \varepsilon^2.$$

Переходя здесь к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{m} (x_n - x_n^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

и так как это верно при любом $m = 1, 2, \dots$, то

$$\sum_{n=1}^{m} (x_n - x_n^{(k)}) \leqslant \varepsilon^2, \quad k > k_\varepsilon. \qquad (57.9)$$

Таким образом, точка $y^{(k)} = (x_1 - x_1^{(k)}, \dots, x_n - x_n^{(k)}, \dots)$, $k > k_\varepsilon$, принадлежит пространству l_2, но в этом случае и точка

$x = (x_1, \dots, x_n, \dots) = x^{(k)} + y^{(k)}$ также принадлежит пространству l_2. В самом деле,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} [(x_n - x_n^{(k)}) + x_n^{(k)}]^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(k)})^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(k)2}} \underset{(57.9)}{<} +\infty, \quad k > k_\varepsilon,$$

так как точка $x^{(k)}$ принадлежит пространству l_2 и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(k)2} < +\infty.$$

Условие (57.9) означает, что $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x$, т. е. что последовательность (57.8) сходится. Следовательно, пространство l_2 полное. □

Согласно определению, фундаментальная последовательность — это такая последовательность, у которой члены неограниченно сближаются при возрастании их номеров. С такой ситуацией часто приходится встречаться при численном решении математических задач: последовательно получающиеся решения все больше приближаются друг к другу и, какое бы положительное число ни было задано, на достаточно большом шаге их разность сделается и будет оставаться меньше этого числа. Если в пространстве, к которому принадлежат рассматриваемые приближенные решения, они накапливаются около некоторой точки этого пространства, иначе говоря, последовательность этих решений оказывается не только фундаментальной, но и сходящейся, то ее предел, как правило, оказывается точным решением задачи. Этим объясняется, что пространства, в которых каждая фундаментальная последовательность сходится, играют большую роль в математике.

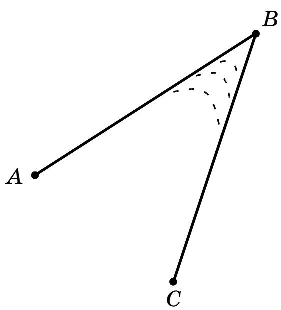


Рис. 10

Для того чтобы показать, что не всегда фундаментальные последовательности сходятся, рассмотрим следующую задачу. Найти в пространстве гладких кривых, лежащих на заданной плоскости и проходящих через ее точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, кривую наименьшей длины (рис. 10). Нетрудно видеть, что эта задача не имеет решения, хотя и можно построить фундаментальную последовательность гладких кривых, длины которых стремятся к нижней грани длин всех глад-

ких кривых, проходящих через точки A, B, C. Для этого достаточно, приближаясь к вершине B угла $\angle ABC$, гладко скруглять стороны угла. Однако полученная таким образом фундаментальная последовательность* не имеет предела в множестве гладких кривых. Это связано с тем обстоятельством, что в данном случае кривой наименьшей длины является не гладкая кривая, а ломаная с вершинами в точках A, B, C.

Рассмотрим некоторые свойства полных метрических пространств. Прежде всего ясно, что каждое замкнутое подмножество полного метрического пространства также является полным пространством.

Для описания следующего свойства полных пространств введем понятия диаметра подмножества метрического пространства и последовательности Коши его подмножеств.

Для подмножества E метрического пространства X величина

$$\operatorname{diam} E \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in E, y \in E} \rho(x, y) \qquad (57.10)$$

называется его *диаметром*.

Множество метрического пространства называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

УПРАЖНЕНИЯ. 7. Доказать, что если $\overline{E}$ есть замыкание множества E в метрическом пространстве, то

$$\operatorname{diam} \overline{E} = \operatorname{diam} E.$$

8. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность метрического пространства ограничена.

Последовательность $\{E_n\}$ непустых множеств метрического пространства называется *последовательностью Коши*, если они последовательно содержат друг друга и их диаметры стремятся к нулю.

Таким образом, последовательность множеств $\{E_n\}$ является последовательностью Коши, если:

$$E_n \neq \varnothing, \qquad (57.11)$$

$$E_{n+1} \subset E_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (57.12)$$

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} E_n = 0. \qquad (57.13)$$

---

* Фундаментальность последовательности понимается в смысле расстояния

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sup_{x \in [a,b]} \sqrt{(x_2(t) - x_2(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2}$$

между путями $\Gamma_1 = \{x_1(t), y_1(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ и $\Gamma_2 = \{x_2(t), y_2(t); a \leqslant t \leqslant b\}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства является фундаментальной последовательностью (последовательностью Коши) и $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, $n = 1, 2, \dots$, то последовательность множеств $\{E_n\}$ является последовательностью Коши.

ТЕОРЕМА 1. *В полном метрическом пространстве всякая последовательность Коши замкнутых множеств имеет непустое пересечение, состоящее из одной точки.*

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая последовательность Коши множеств полного метрического пространства имеет, и притом единственную, точку, являющуюся точкой прикосновения для всех множеств последовательности.*

Доказательство теоремы. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность Коши замкнутых множеств F_n полного метрического пространства X. Выбрав в каждом множестве F_n по точке x_n (это возможно в силу выполнения условия (57.11)),

$$x_n \in F_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{57.14}$$

получим фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ в пространстве X. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$, в силу выполнения условия (57.13), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\operatorname{diam} F_n < \varepsilon$. Поэтому если $n > n_0$, $m > n_0$ и, например, $n > m$, то $x_m \in F_m$, $x_n \in F_n \underset{(57.12)}{\subset} F_m$, следовательно, $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

В силу полноты пространства X, последовательность $\{x_n\}$ сходится, т. е. существует точка $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Для любого $n = 1, 2, \dots$, в силу выполнений условий (57.12) и (57.14), все члены последовательности $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ принадлежат множеству F_n, а так как эта последовательность сходится к точке x и F_n — замкнутые множества, то $x \in F_n$ при любом n, т. е. $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Если $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, то для каждого $n = 1, 2, \dots$ будем иметь $x \in F_n$, $y \in F_n$ и поэтому

$$\rho(x, y) \leqslant \operatorname{diam} F_n.$$

Перейдя здесь к пределу при $n \to \infty$, в силу условия (57.13), получим $\rho(x, y) = 0$ и, следовательно, $x = y$, т. е. пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ состоит из единственной точки x. □

Доказательство следствия. Если $\{E_n\}$ — последовательность Коши полного метрического пространства, то последовательность $\{\overline{E}_n\}$ замыканий $\overline{E}_n$ множеств E_n является последовательностью Коши замкнутых множеств. Согласно теореме, существует, и притом единственная, точка $x \in \overline{E}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. □

Заметим, что в доказанной теореме условие о стремлении к нулю диаметров замкнутых множеств существенно: если это условие не будет выполнено, то пересечение последовательности непустых замкнутых множеств, последовательно содержащих друг друга, может оказаться пустым.

Например, последовательность лучей $F_n = \{x : x \geqslant n\}$ на прямой $\boldsymbol{R}$ образует последовательность последовательно вложенных друг в друга замкнутых множеств $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$, пересечение которых пусто: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$.

57.3. Отображения метрических пространств

Пусть $f : X \to Y$ — отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y.

Точка $y_0 \in Y$ называется *пределом отображения* f в точке x_0, если

$$\lim_{\rho(x, x_0) \to 0} \rho\,(f(x), y_0) = 0.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то отображение f называется *непрерывным в точке* x_0.

Это определение равносильно следующему определению, формулируемому в терминах последовательностей.

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеет место $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Как обычно, является верным и равносильное определение непрерывности в терминах окрестностей.

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ существует такая окрестность U точки x_0, что $f(U) \subset V$.

На «δ-ε-языке» определение непрерывности в точке выглядит следующим образом.

Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x_0 \in X$, для которой $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $\rho\,(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Доказательство эквивалентности всех приведенных выше определений предела и непрерывности проводится аналогично случаю числовых функций.

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным отображением пространства X в пространство Y*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x \in X$, $x' \in X$, для которых $\rho\,(x', x) < \delta$, выполняется неравенство $\rho\,(f(x'), f(x)) < \varepsilon$, то отображение f называется *равномерно непрерывным на пространстве X*.

Равномерно непрерывное отображение метрического пространства в другое метрическое пространство очевидным образом непрерывно в каждой точке.

Последовательность отображений $f_n : X \to Y$ называется *сходящейся к отображению* $f : X \to Y$, если для каждого $x \in X$ последовательность точек $\{f_n(x)\}$ метрического пространства Y сходится к точке $f(x)$:

$$\lim_{n \to \infty} f_n\,(x) = f(x).$$

Последовательность отображений $f_n : X \to Y$, сходящаяся к отображению $f : X \to Y$, называется *равномерно сходящейся*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$\rho\,(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

УПРАЖНЕНИЕ 9. Сформулировать и доказать критерий Коши, являющийся необходимым и достаточным условием равномерной сходимости отображений метрического пространства в полное метрическое пространство.

Аналогично теореме 8 п. 36.4 доказывается, что если все члены равномерно сходящейся последовательности отображений одного метрического пространства в другое являются непрерывными в некоторой точке, то и предельное отображение последовательности непрерывно в этой точке. Из этого следует, что предел равномерно сходящейся последовательности непре-

рывных отображений одного метрического пространства в другое также является непрерывным отображением. В частности, это справедливо для числовых функций, заданных на метрических пространствах.

Пример. Рассмотрим метрическое пространство ограниченных и непрерывных на некотором метрическом пространстве X функций f, расстояние между которыми определяется по формуле (57.1). Так как фундаментальность последовательности $\{f_n\}$ в смысле метрики (57.1) означает, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве X, то всякая фундаментальная последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ равномерно сходится к некоторой функции f. Эта функция f, как отмечалось выше, непрерывна и, как было доказано несколько раньше в этом пункте, ограничена на X, т. е. принадлежит рассматриваемому пространству функций.

Таким образом, *пространство ограниченных и непрерывных на метрическом пространстве X функций с метрикой* (57.1) *является полным метрическим пространством*. Оно обозначается $C(X)$* и является, очевидно, подпространством всех ограниченных на пространстве X функций с расстоянием, определенным той же формулой (57.1).

В том случае, когда пространство X является отрезком числовой оси: $X = [a, b]$, вместо $C([a, b])$ будем писать короче $C\,[a, b]$.

В частности, так как всякая функция, непрерывная на некотором компакте A, лежащем в n-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$, ограничена (см п. 19.4), то пространство функций, непрерывных на компакте A, с расстоянием, определенным по формуле (57.1), является полным. В дальнейшем будет показано, что это верно для любых компактов (см. далее определение 10 в п. 57.6), а не обязательно для лежащих в конечномерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

ЛЕММА 3. *Отображение $f : X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества пространства Y является открытым множеством пространства X.*

---

* C — первая буква латинского слова continuum — непрерывный.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы в п. 36.10. Пусть $f : X \to Y$ непрерывное отображение, V — открытое подмножесгво пространства Y и $U = f^{-1}(V)$ — прообраз V при отображении f. Тогда если $x \in U$, то для окрестности V точки $f(x)$, согласно определению непрерывности в точке, существует такая окрестность U_0, что $f(U_0) \subset V$ и, следовательно, $U_0 \subset f^{-1}(V) = U$. Таким образом, для каждой точки $x \in U$ существует ее окрестность U_0, содержащаяся в U. Это и означает, что U — открытое множество.

Пусть при отображении $f : X \to Y$ прообраз каждого открытого в Y множества является открытым в X множеством, тогда для любой точки $x \in X$ и любой окрестности V точки $f(x)$ прообраз $U = f^{-1}(V)$ открытого множества V также открыт, т. е. является окрестностью точки x. Таким образом, для любой окрестности V точки $f(x)$ существует такая окрестность U точки x, что $f(U) = V$. Это гарантирует непрерывность отображения f в точке $x \in X$. □

ЛЕММА 4. *Отображение $f : X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого замкнутого множества пространства Y является замкнутым множеством пространства X.*

Доказательство. Так как открытые и замкнутые множества являются взаимно дополнительными (см. лемму 6 в п. 35.2) и прообраз дополнения множества является дополнением прообраза множества, то условие, что прообраз каждого замкнутого множества является замкнутым множеством, является равносильным тому, что прообраз каждого открытого множества является открытым. Поэтому лемма 4 сразу следует из леммы 3. □

ТЕОРЕМА 2. *Композиция непрерывных отображений метрических пространств является непрерывным отображением.*

Доказательство. Если X, Y и Z — метрические пространства, $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — непрерывные отображения, то, согласно лемме 3, для любого открытого в Z множества G множество $g^{-1}(G)$ является открытым в Y множеством, а $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G)$ — открытым в X множеством. Таким образом, прообраз любого открытого множества при композиции $g \circ f$ является открытым множеством, что, в силу той же леммы 3, и означает непрерывность этой композиции. □

В дальнейшем нам понадобится еще понятие непрерывности отображения (функции) $f = f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, произведения $X \times Y$ метрических пространств X и Y (в частности, может быть $X = Y$) в метрическое пространство Z.

Прежде всего, заметим, что произведение $X \times Y$ метрических пространств X и Y превращается также в метрическое пространство, если в нем ввести метрику ρ по формуле

$$\rho((x', y'), (x, y)) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\rho^2(x', x) + \rho^2(y', y)} \qquad (57.15)$$

(аксиомы метрики для ρ легко проверяются).

Отображение $f : X \times Y \to Z$ называется непрерывным в точке $(x_0, y_0) \in X \times Y$, если оно непрерывно на метрическом пространстве $X \times Y$ с метрикой (57.15), т. е. если

$$\lim_{\rho((x, y), (x_0, y_0)) \to 0} f(x, g) = f(x_0, y_0).$$

57.4. Принцип сжимающих отображений

Докажем теорему о существовании неподвижной точки у одного класса отображений метрических пространств в себя. Эта теорема имеет много разнообразных применений при доказательстве существования решений и их приближенного вычисления для тех или иных уравнений.

Определение 6. *Отображение $f : X \to X$ метрического пространства X в себя называется сжимающим, если существует такое число q, $0 < q < 1$, что для любых точек $x \in X$, $y \in Y$ выполняется неравенство*

$$\rho(f(x), \ f(y)) \leqslant q\rho(x, y). \qquad (57.16)$$

Из выполнения этого условия следует, что если для любого $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \varepsilon$, то для любых двух точек $x \in X$, $y \in Y$, для которых $\rho(x, y) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(f(x), \ f(y)) \underset{(57.16)}{\leqslant} q\rho(x, y) < q\delta = q\varepsilon,$$

т. е. сжимающее отображение равномерно непрерывно, а следовательно, и непрерывно в каждой точке x пространства X:

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x). \qquad (57.17)$$

Определение 7. *Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения $f : X \to X$, если $f(x) = x$.*

ТЕОРЕМА 3 (принцип неподвижной точки Пикара—Банаха*). *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет, и притом единственную, неподвижную точку.*

Более того, если $f : X \to X$ — сжимающее отображение полного метрического пространства X в себя и a — его неподвижная точка: $f(a) = a$, то для любой точки $x_0 \in X$ итерационная последовательность

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\quad x_2 = f(x_1),\ \dots,\quad x_{n+1} = f(x_n),\ \dots \tag{57.18}$$

сходится к точке a, причем если отображение f удовлетворяет условию (57.16), *то имеет место следующая оценка сходимости последовательности* (57.18):

$$\rho(x_n, a) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, f(x_0)). \tag{57.19}$$

Доказательство. Пусть для отображения $f : X \to X$ полного метрического пространства X в себя выполняется условие (57.16). Выберем произвольно $x_0 \in X$ и покажем, что соответствующая итерационная последовательность $\{x_n\}$ (см. (57.18))

$$x_{n+1} = f(x_n),\quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{57.20}$$

является фундаментальной.

Действительно,

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \underset{(57.20)}{=} \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \underset{(57.16)}{\leqslant} q\rho(x_{n-3}, x_n) \underset{(57.20)}{=}$$
$$= q\rho(f(x_{n-2}), f(x_{n-3})) \underset{(57.16)}{\leqslant} q^2\rho(x_{n-2}, x_{n-3}) \underset{(57.20)}{=}$$
$$= \dots \underset{(57.16)}{\leqslant} q^n\rho(x_0, x_1) \underset{(57.20)}{=} q^n\rho(x_0, f(x_0)). \tag{57.21}$$

Поэтому

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leqslant \rho(f(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots$$
$$\dots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \underset{(57.21)}{\leqslant} (q^n + q^{n+1} + \dots + q^{n+m-1})\rho(x_0, f(x_0)) =$$
$$= \frac{q^n - q^{n+m}}{1-q}\rho(x_0, f(x_0)) < \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, f(x_0)). \tag{57.22}$$

Так как $0 < q < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, f(x_0)) = 0$$

* Ш. Э. Пикар (1856—1941) — французский математик; С. Банах (1892—1945) — польский математик.

и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что для всех $n > n_0$

$$\frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, f(x_0)) < \varepsilon, \qquad (57.23)$$

тогда для всех $n > n_0$ и всех $m \geqslant 0$ будем иметь

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \underset{\substack{(57.22),\\(57.23)}}{<} \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. В силу полноты пространства X, отсюда следует, что она сходится, т. е. что существует

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a \in X.$$

Поэтому, в силу непрерывности отображения f,

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \underset{(57.20)}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{(57.17)}{=} f(a).$$

Итак, $f(a) = a$, т. е. a — неподвижная точка отображения f.

Перейдя к пределу в неравенстве (57.22) при $m \to \infty$, получим

$$\rho(x_n, a) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, f(x_0)).$$

Все утверждения теоремы доказаны. □

Отметим, что для приложений существенным является тот факт, что принцип сжимающих отображений дает возможность не только доказать существование решения уравнения, но и найти его с любой точностью при помощи итерационной последовательности (57.18) и оценки (57.19).

З а м е ч а н и е. Если некоторая степень отображения полного метрического пространства в себя является сжимающим отображением, то само отображение имеет, и притом единственную, неподвижную точку.

В самом деле, если отображение $f : X \to X$ полного метрического пространства X в себя таково, что его n-я степень $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}}$, $n \geqslant 1$, является сжимающим отображением, то у нее существует неподвижная точка $x \in X$, т. е. $f^n(x) = x$; тогда

$$f(x) = f(f^n(x)) = f^n(f(x)),$$

т. е. $f(x)$ также неподвижная точка отображения f^n. Но такая точка, согласно доказанной теореме, единственная, следовательно,

$$f(x) = x.$$

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра*

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\, x(s) ds + f(t), \tag{57.24}$$

где $K(t, s)$ и $f(t)$ — заданные непрерывные функции: функция f на отрезке $[a, b]$, а функция K на квадрате $Q = [a, b] \times [a, b]$, λ — некоторое число.

Оператор $A(x)$, определяемый формулой

$$A(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda \int_a^t K(t, s)\, x(s) ds + f(t), \tag{57.25}$$

отображает полное пространство непрерывных функций $C[a, b]$ (см. пример в п. 57.3) в себя. В самом деле, пусть функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Имеем

$$|A(x)(t + \Delta t) - A(x)(t)| \underset{(57.25)}{\leqslant}$$

$$\leqslant |\lambda| \int_a^b | K(t + \Delta t, s) - K(t, s)| |x(s)| ds + |f(t + \Delta t) - f(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|\, \omega(K; |\Delta t|) \sup_{[a,\, b]} |x(s)|(b - a) + |f(t + \Delta t) - f(t)|,$$

$$t \in [a, b],\ t + \Delta t \in [a, b], \tag{57.26}$$

где $\omega(K, |\Delta t|)$ — модуль непрерывности функции K на квадрате Q. В силу непрерывности функции $x(s)$ на отрезке $[a, b]$, она ограничена на нем:

$$\sup_{[a,\, b]} |x(s)| < +\infty, \tag{57.27}$$

а в силу непрерывности функции $K(t, s)$ на квадрате Q, она равномерно непрерывна на нем:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \omega(K; |\Delta t|) = 0. \tag{57.28}$$

Наконец, в силу непрерывности функции f,

$$\lim_{\Delta t \to 0} |f(t + \Delta t) - f(t)| = 0. \tag{57.29}$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} [A(x)(t + \Delta t) - A(x)(t)] = 0,$$

т. е. функция $A(x)(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, действительно, если $x \in C[a, b]$, то и $A(x) \in \in C[a, b]$.

---

* В. Вольтерра (1860—1940) — итальянский математик.

Оценим расстояние между образами двух функций при отображении A. Напомним, что расстояние в пространстве $C\,[a, b]$ определяется по формуле

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{[a,\,b]} |x_1(t) - x_2(t)|,\ x_1 \in C[a, b],\ x_2 \in C[a, b].$$

Пусть

$$c = \max_{Q} |K(t, s)|, \tag{57.30}$$

тогда

$$|A(x_1)(t) - A(x_2)(t)| \underset{(57.25)}{=} \left|\lambda \int_a^t K(t, s)\,[x_1(s) - x_2(s)]ds\right| \underset{(57.30)}{\leqslant}$$

$$\underset{(57.30)}{\leqslant} |\lambda|\, c(t-a)\, \rho(x_1, x_2). \tag{57.31}$$

Поэтому

$$|A^2(x_1)(t) - A^2(x_2)(t)| \underset{(57.25)}{=} \left|\lambda \int_a^t K(t, s)\,(A(x_1)(s) - A(x_2)(s))ds\right| \underset{(57.30)}{\leqslant}$$

$$\leqslant |\lambda|\, c \int_a^t \max_{[a,\,b]} |A(x_1)(s) - A(x_2)(s)|ds \underset{(57.31)}{\leqslant} \lambda^2 c^2 \rho(x_1, x_2) \int_a^t (s-a)dt =$$

$$= \frac{\lambda^2 c^2 (t-a)^2}{2}\, \rho(x_1, x_2),\ a \leqslant t \leqslant b.$$

Аналогично

$$|A^n(x_1)(t) - A^n(x_2)(t)| \leqslant \frac{\lambda^n c^n (t-a)^n}{n!}\, \rho(x_1, x_2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda^n c^n (b-a)^n}{n!}\, \rho(x_1, x_2), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Выбрав n так, чтобы $\frac{\lambda^n c^n (b-a)^n}{n!} < 1$, получим, что для этого n отображение A^n будет сжимающим отображением пространства $C[a, b]$ в себя, поэтому уравнение Вольтерра (57.24) при любом λ имеет, и притом единственное, непрерывное решение.

УПРАЖНЕНИЕ 10. Привести пример такого отображения f полного метрического пространства X в себя, у которого для любых двух точек $x \in X$, $y \in Y$ выполняется условие $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$, но нет неподвижной точки.

57.5. Пополнение метрических пространств

Полные метрические пространства благодаря наличию у них доказанных выше свойств играют важную роль в математике. Поэтому весьма существенным является то обстоятельство, что всякое метрическое пространство содержится, как это будет сказано, в полном метрическом пространстве.

Определение 8. *Множество A метрического пространства X называется плотным в пространстве X, если замыкание $\overline{A}$ множества A совпадает с пространством X :* $\overline{A} = X$.

Например, множество рациональных чисел плотно в множестве действительных чисел.

Очевидно, что свойство множества быть плотным в пространстве сохраняется при изометрических отображениях этого пространства.

Определение 9. *Полное метрическое пространство X^* называется пополнением метрического пространства X, если X содержится в X^* и плотно в нем:* $X \subset X^*$, $\overline{X} = X^*$.

Например, множество действительных чисел является пополнением множества рациональных чисел.

Отметим, что если метрическое пространство X' изометрично пространству X и X имеет пополнение X^*, то и пространство X' имеет пополнение. Чтобы убедиться в этом, достаточно произвести отождествление соответствующих при изометрическом отображении элементов пространств X' и X (см. п. 57.1).

Покажем, что для всякого неполного метрического пространства существует его пополнение, т. е. покажем, что всякое неполное метрическое пространство является плотным подмножеством в некотором полном метрическом пространстве.

ТЕОРЕМА 4. *Для всякого метрического пространства существует его пополнение.*

Доказательство.

I. Конструкция пополнения X^* заданного метрического пространства X. Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов пространства X назовем *эквивалентными*, если

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0. \qquad (57.32)$$

Эквивалентность двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ обозначается символом $\{x_n\} \sim \{y_n\}$; она обладает следующими свойствами:

1^0. *Всякая последовательность $\{x_n\}$ эквивалентна сама себе: $\{x_n\} \sim \{x_n\}$.*

2^0. *Если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, то $\{y_n\} \sim \{x_n\}$.*

3^0. *Если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, а $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, то $\{x_n\} \sim \{z_n\}$.*

Нас будут интересовать только фундаментальные последовательности пространства X. Их множество распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой последовательностей. Обозначим эти классы через x^*, y^*, z^*, ... , а их совокупность — через X^*. Если фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ содержится в классе x^*, то будем, как обычно, это записывать следующим образом: $\{x_n\} \in x^*$.

II. Определение расстояния $\rho^*(x^*, y^*)$ в X^*. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности метрического пространства X. Тогда числовая последовательность $\rho\{x_n, y_n\}$ также фундаментальна, т. е. удовлетворяет условию Коши (см. п. 4.7). Действительно, для любых номеров n и m

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, y_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n),$$

откуда, в силу симметрии индексов n и m,

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \qquad (57.33)$$

Из фундаментальности последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\rho(x_n, y_m) < \varepsilon/2, \quad \rho(y_n, y_m) < \varepsilon/2. \qquad (57.34)$$

Из (57.33) и (57.34) для $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ получаем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ является фундаментальной, т. е. удовлетворяет условию Коши, поэтому сходится.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$. Положим, по определению,

$$\rho^*(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n). \qquad (57.35)$$

В силу доказанного, указанный предел существует. Покажем, что так определенная функция $\rho^*(x^*, y^*)$ не зависит от выбора фундаментальных последовательностей $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$ и удовлетворяет аксиомам расстояния.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{x'_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{y'_n\} \in y^*$. Тогда

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) + \rho(y_n, y'_n)$$

и поэтому

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

В силу эквивалентности последовательностей $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ и соответственно $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$, получим (см. (57.32))

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x'_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, y'_n) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

III. Проверка аксиом расстояния для $\rho^*(x^*, y^*)$. Пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Прежде всего, так как $\rho(x_n, y_n) \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то, перейдя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, согласно определению (57.35), получим $\rho^*(x^*, y^*) \geqslant 0$.

Если $\rho^*(x^*, y^*) = 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = 0$, т. е. последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, что означает совпадение элементов x^* и y^* : $x^* = y^*$. Из равенства $\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$, перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^*(y^*, x^*)$, а из неравенства $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$ имеем

$$\rho^*(x^*, y^*) \leqslant \rho^*(x^*, z^*) + \rho^*(z^*, y^*).$$

Итак, X^* является метрическим пространством.

IV. Построение подпространства пространства X^*, изометричного пространству X. Пусть $x \in X$. Стационарная последовательность $x_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$, очевидно, фундаментальная. Поставим в соответствие каждому $x \in X$ точку $x^* \in X^*$ такую, что $\{x\} \in x^*$. Если при указанном соответствии точке x соответствует точка x^*, а точке y — точка y^*, то, очевидно, при $x \neq y$ будем иметь $x^* \neq y^*$, причем $\rho^*(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, y) = \rho(x, y)$, т. е. указанное соответствие осуществляет взаимно-однозначное изометрическое соответствие между пространством X и некоторым подмножеством X' пространства X^*.

Точку x^* пространства X^*, соответствующую при рассматриваемом соответствии точке $x \in X$, будем для простоты обозначать также через x, а пространство X' — через X. Можно считать, что мы просто отождествили соответствующие точки пространств X и X' (см. замечание после определения 2). В этих обозначениях имеем изометрическое включение $X \subset X^*$.

V. Доказательство плотности X в X^*. Покажем, что каждая точка x^* пространства X^* является точкой

прикосновения множества X. Для этого достаточно показать, что для любой точки $x^* \in X^*$ существует последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к x^*.

Пусть $x^* \in X^*$ и $\{x_n\} \in x^*$, $x_n \in X$. Точку пространства X^*, содержащую фундаментальную последовательность, все члены которой равны одной и той же точке x_n, будем обозначать, согласно сделанному выше соглашению, также через x_n. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X^*$, сходится к точке $x^* \in X^*$.

В формуле (57.35) расстояния $\rho^*(x^*, x_n)$ возьмем для точки $x_n \in X^*$ стационарную последовательность $\{x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots\}$, а для точки X^* — данную последовательность $\{x_n\}$, в которой для удобства индекс n заменим на m: $\{x_m\} \in x^*$. Тогда

$$\rho^*(x^*, x_n) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n).$$

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ следует, что существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\rho^*(x^*, x_n) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0$, что означает, что x^* является точкой прикосновения множества X. Итак, $\overline{X} = X^*$.

VI. Доказательство полноты пространства X^*. Пусть $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность точек пространства X^*, $x_n \in X$ и $\rho^*(x_n^*, x_n) < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Такие точки x_n существуют в силу плотности X в X^*.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, замечая, что

$$\rho^*(x_n, x_m) \leqslant \rho^*(x_n, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, x_m) <$$

$$< \frac{1}{n} + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m},$$

выберем номер n_ε так, чтобы для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполнялись неравенства

$$\rho^*(x_n^*, x_m^*) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для указанных номеров будем иметь

$$\rho(x_n, x_m) = \rho^*(x_n, x_m^*) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \tag{57.36}$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

Обозначим через x^* класс эквивалентных последовательностей, которому принадлежит последовательность $\{x_n\}$. Очевидно,

$$\rho^*(x^*, x_n^*) \leqslant \rho^*(x^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_n^*) = \rho^*(x^*, x_n) + \frac{1}{n}.$$

Но из (57.36) при $m \to \infty$ и $n > n_\varepsilon$ получим

$$\rho^*(x^*, x_n) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0,$$

поэтому и

$$\lim_{n \to \infty} \rho^*(x^*, x_n^*) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что данная фундаментальная последовательность $\{x_n^*\}$ сходится в X^*. Полнота X^* доказана. □

З а м е ч а н и е. В применении к пространству рациональных чисел $X = \boldsymbol{Q}$ доказательство теоремы 1 дает метод построения множества $X^* = \boldsymbol{R}$ действительных чисел исходя из множества рациональных чисел.

УПРАЖНЕНИЕ 11. Доказать, что с точностью до изометрических пространств пополнение метрического пространства единственно.

57.6. Компакты

По аналогии со случаем евклидовых пространств (см. определение 29 в п. 35.3) дадим следующее определение.

Определение 10. *Множество метрического пространства называется компактом, если из любой последовательности его точек можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к его точке.*

Ясно, что компакт является замкнутым множеством в любом содержащем его метрическом пространстве. Действительно, если $E \subset X$, X — метрическое пространство, E — компакт и x — его точка прикосновения, то существует такая последовательность $x_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Согласно определению компакта, из этой последовательности можно выделить сходящуюся к некоторой точке компакта E подпоследователь-

ность. Так как этой точкой может являться только x, то $x \in E$. Это и означает замкнутость компакта E в пространстве X.

Очевидно также, что всякое замкнутое подмножество компакта является компактом.

УПРАЖНЕНИЕ 12. Доказать, что два непустых непересекающихся замкнутых множества метрического пространства, из которых хотя бы одно является компактом, находятся на положительном расстоянии (определите понятие расстояния между двумя множествами метрического пространства).

Определение 11. *Пусть E подмножество метрического пространства X и $\varepsilon > 0$. Множество $A \subset X$ называется ε-сетью для множества E, если для любой точки $x \in E$ существует такая точка $y \in A$, что*

$$\rho(x, y) < \varepsilon.$$

Определение 12. *Множество E метрического пространства X называется вполне ограниченным, если для него при любом $\varepsilon > 0$ в пространстве X существует конечная ε-сеть.*

УПРАЖНЕНИЕ 13. Доказать, что если множество вполне ограничено в некотором метрическом пространстве, то для этого множества при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, состоящая только из его точек.

Легко убедиться, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным. Действительно, если E — вполне ограниченное множество, то для него, например при $\varepsilon = 1$, существует конечная ε-сеть $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Поэтому, каковы бы ни были точки $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, для них существуют такие a_{n_1} и a_{n_2}, что $\rho(x_1, a_{n_1}) < 1$, $\rho(x_2, a_{n_2}) < 1$. Следовательно,

$$\rho(x_1, x_2) \leqslant \rho(x_1, a_{n_1}) + \rho(a_{n_1}, a_{n_2}) + \rho(a_{n_2}, x_2) <$$
$$< 2 + \max_{i, j = 1, 2, \ldots, n} \rho(a_i, a_j)$$

и, таким образом, диаметр $\operatorname{diam} E$ множества E не превосходит конечной величины $2 + \max\limits_{i, j = 1, 2, \ldots, n} \rho(a_i, a_j)$.

Обратное неверно: существуют ограниченные множества, не являющиеся вполне ограниченными.

Пример 1. Рассмотрим множество E точек $e_n = (0, 0, \ldots$ $\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ гильбертова пространства l_2 (см. пример 6 в п. 57.1), т. е. точек $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$, у которых n-я координата равна единице, а все остальные равны нулю. Очевидно,

$$\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}, \quad n \neq m, \quad n, m = 1, 2, \ldots, \qquad (57.37)$$

и, таким образом, $\operatorname{diam} E = \sqrt{2}$, следовательно, множество E ограничено.

Вместе с тем из выполнения условия (57.37) следует, что для множества E нет конечной ε-сети ни при каком ε:

$$0 < \varepsilon < \sqrt{2}/2. \tag{57.38}$$

В самом деле, если бы нашлась такая ε-сеть: $A = \{a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_k\}$, то для каждого e_n, $n = 1, 2, \ldots$, нашелся бы такой элемент a_{i_n} этой ε-сети, что

$$\rho(e_n, a_{i_n}) < \varepsilon.$$

Так как число элементов ε-сети A конечно, а число элементов множества E бесконечно, то найдется номер i_0, для которого существуют по крайней мере два таких различных элемента e_n и e_m, что

$$\rho(e_n, a_{i_0}) < \varepsilon, \ \rho(e_m, a_{i_0}) < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\rho(e_n, e_m) \leqslant \rho(e_n, a_{i_0}) + \rho(a_{i_0}, e_m) < 2\varepsilon \underset{(57.38)}{<} \sqrt{2},$$

а это противоречит равенству (57.37).

Отметим, что из элементов множества $E = \{e_n\}$ нельзя составить никакой фундаментальной последовательности, кроме стационарной с некоторого номера. Это сразу следует из выполнения равенства (57.37). Поэтому последовательность $\{e_n\}$ не содержит сходящихся подпоследовательностей (так как всякая сходящаяся последовательность фундаментальная) и, следовательно, множество E не является компактом.

Вместе с тем множество E представляет собой замкнутое множество: если бы нашлась какая-либо точка прикосновения x множества E, не содержащаяся в нем, то нашлась бы последовательность, состоящая из различных точек множества $E = \{e_n\}$ и сходящаяся к точке x. Эта последовательность была бы фундаментальной, что противоречит сказанному выше.

Итак, множество $E = \{e_n\}$ является ограниченным замкнутым множеством, которое не есть компакт. Этот пример показывает, что теорема о том, что в конечномерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ свойство множества быть компактом равносильно ограниченности и замкнутости множества (см. теорему 3 в п. 35.3), не имеет прямого аналога в случае произвольных метрических пространств. Кроме того, этот пример показывает, что гильбертово пространство не изометрично никакому конечно-

мерному пространству, так как в последнем из ограниченности и замкнутости множества следует, что оно является компактом.

Примером вполне ограниченных множеств являются все конечные подмножества метрических пространств, а также все ограниченные множества в конечномерных евклидовых пространствах.

УПРАЖНЕНИЕ 14. Доказать, что всякое ограниченное в $\boldsymbol{R}^n$ множество является и вполне ограниченным.

Нетривиальным примером вполне ограниченного множества в бесконечномерном пространстве является так называемый гильбертов кирпич.

Пример 2. Множество Q^∞ точек $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ гильбертова пространства l_2, координаты которых удовлетворяют условию

$$|x_n| \leqslant \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{57.39}$$

называется *гильбертовым кирпичом*.

Иногда гильбертовым кирпичом называют множество таких точек $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$, для координат которых выполняются неравенства $|x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, поскольку у обычного кирпича длина в два раза больше ширины, а ширина в два раза больше толщины. Мы будем придерживаться условия (57.39).

Докажем, что гильбертов кирпич Q^∞ является вполне ограниченным множеством. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, выберем n так, чтобы

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \frac{\varepsilon^2}{4}, \tag{57.40}$$

и обозначим через Q^n n-мерный параллелепипед, являющийся проекцией гильбертова кирпича Q^∞ в $\boldsymbol{R}^n$, иначе говоря, Q^n — это множество тех точек Q^∞, у которых все координаты начиная с $(n + 1)$-й равны нулю: $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Множество Q^n ограничено в $\boldsymbol{R}^n$ и поэтому у него имеется конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Выберем произвольно точку $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in Q^\infty$ и обозначим через $x^{(n)}$ ее проекцию в пространство $\boldsymbol{R}^n$:

$$x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots). \tag{57.41}$$

Так как $x^{(n)} \in Q^n$, то для нее существует такая точка a_i $\frac{\varepsilon}{2}$-сети A, что

$$\rho(x^{(n)}, a_i) < \varepsilon/2, \tag{57.42}$$

тогда

$$\rho(x, a_i) \leqslant \rho(x, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, a) \underset{\substack{(57.41),\\(57.42)}}{<}$$

$$< \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} x_m^2} + \frac{\varepsilon}{2} \underset{(57.39)}{\leqslant} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2}} + \frac{\varepsilon}{2} \underset{(57.40)}{<} \varepsilon,$$

т. е. множество A является ε-сетью и для гильбертова кирпича.

Нетрудно убедиться, что из того, что гильбертов кирпич задается нестрогими неравенствами (57.39), следует, что он является замкнутым множеством. Таким образом, он представляет собой замкнутое вполне ограниченное множество.

ЛЕММА 5. *Множество вполне ограничено тогда и только тогда, когда каждая последовательность этого множества содержит фундаментальную подпоследовательность.*

Доказательство. 1) Пусть E — вполне ограниченное подмножество метрического пространства X и задана последовательность $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$; для него существует $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $a_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, k$, множества E. Согласно определению $\frac{\varepsilon}{2}$-сети, имеет место включение

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} U\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Поэтому найдется такая точка a_i, в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности которой содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, тогда существует и подпоследовательность $x_{n_m} \in U\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$; для нее

$$\rho(x_{n_{m_1}}, x_{n_{m_2}}) \leqslant \rho(x_{n_{m_1}}, a_i) + \rho(a_i, x_{n_{m_2}}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. диаметр множества значений последовательности не превышает ε.

Возьмем теперь $\varepsilon = 1$ и из заданной последовательности выделим подпоследовательность

$$x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{1m},\ \ldots, \tag{57.43}$$

диаметр множества значений которой не превышает 1 (здесь $x_{1m} = x_{n_m}$ в смысле предыдущей записи). Из последовательности (57.43) выделим подпоследовательность

$$x_{21}, \ x_{22}, \ \dots, \ x_{2m}, \ \dots,$$

диаметр множества значений которой не превышает $1/p$. Продолжая этот процесс, получим последовательность

$$x_{p1}, \ x_{p2}, \ \dots, \ x_{pm}, \ \dots, \ p = 1, 2, \dots,$$

диаметр множества значений которой не превышает $1/p$, и т. д.

Составим диагональную последовательность

$$x_{11}, \ x_{22}, \ \dots, \ x_{mm}, \ \dots. \qquad (57.44)$$

В силу своего построения, она является подпоследовательностью каждой из построенных выше последовательностей. Поэтому, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, выбрав m_0 так, чтобы $1/m_0 < \varepsilon$, получим, что для любых $m_1 > m_0$ и $m_2 > m_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x_{m_1 m_1}, x_{m_2 m_2}) < \frac{1}{m_0} < \varepsilon,$$

т. е. последовательность (57.44) фундаментальная.

2) Пусть множество E метрического пространства X не вполне ограничено. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для множества E в пространстве X не существует конечной ε-сети. Выберем произвольно точку $x_1 \in E$. По предположению, она не образует для множества E ε-сети. Поэтому существует такая точка $x_2 \in E$, что $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Пусть в множестве E уже выбраны такие точки $x_1, x_2, \dots, x_n$, что $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Так как множество этих точек не является ε-сетью для множества E, то в нем существует такая точка (обозначим ее x_{n+1}), что $\rho(x_i, x_{n+1}) \geqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$. Продолжая этот процесс, получим последовательность таких точек $x_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$, что $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$, $n \neq m$, $n, m = 1, 2, \dots$. Ясно, что эта последовательность не содержит фундаментальной подпоследовательности. □

ЛЕММА 6. *Полное вполне ограниченное подмножество метрического пространства является компактом.*

Доказательство. Если подмножество E метрического пространства вполне ограничено и полно (будучи подмножеством метрического пространства, оно само является метрическим пространством, к которому здесь и применяется понятие

полноты, см. определение 5 в п. 57.2), то из всякой последовательности его точек, в силу его вполне ограниченности, можно выделить фундаментальную подпоследовательность (лемма 5), а всякая его фундаментальная последовательность, в силу его полноты, сходится к некоторой его точке, т. е. множество E является компактом. □

ТЕОРЕМА 5. *Метрическое пространство является компактом тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно.*

СЛЕДСТВИЕ. *Компакт является ограниченным множеством в любом содержащем его метрическом пространстве.*

Доказательство. Если метрическое пространство X является компактом, то, какова бы ни была фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ его точек, из нее, как и вообще из всякой последовательности компакта, можно выделить сходящуюся подпоследовательность. К пределу этой подпоследовательности будет сходиться и вся последовательность $\{x_n\}$ в силу своей фундаментальности. Тем самым доказано, что в пространстве X сходится любая фундаментальная последовательность, т. е. что оно является полным метрическим пространством.

Далее, так как всякая последовательность точек компакта X содержит сходящуюся, а следовательно, и фундаментальную подпоследовательность, то, по лемме 5, компакт X вполне ограничен.

Обратное утверждение является частным случаем леммы 6, когда подмножество метрического пространства совпадает со всем пространством.

Следствие вытекает из того, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы подмножество полного метрического пространства было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и вполне ограниченным.*

Доказательство. Действительно, замкнутое подмножество полного пространства также является полным метрическим пространством. Поэтому достаточность условия замкнутости и вполне ограниченности подмножества полного метрического пространства для того, чтобы оно являлось компактом, сразу следует из теоремы 5.

Наоборот, если подмножество полного метрического пространства является компактом, то оно замкнуто в этом пространстве, так как (это было показано выше, сразу после опре-

деления 10) оно замкнуто в любом содержащем его метрическом пространстве. Кроме того, из той же теоремы 5 следует, что оно и вполне ограничено. □

Теорема 6 является обобщением теоремы 3 из п. 35.3: в критерии компактности подмножества произвольного полного метрического условие ограниченности этого подмножества, имевшее место при $X = \boldsymbol{R}^n$, заменяется условием вполне ограниченности.

Пример 3. Гильбертов кирпич Q^∞ (см. пример 2) является компактом. Действительно, гильбертово пространство является полным (см. пример в п. 57.2), а выше было показано, что множество Q^∞ вполне ограничено и замкнуто (см. пример 2), поэтому то, что оно является компактом, сразу следует из теоремы 6.

Определение 13. *Метрическое пространство называется сепарабельным, если оно содержит конечное или счетное плотное в себе множество.*

ТЕОРЕМА 7. *Компакт является сепарабельным метрическим пространством.*

Доказательство. Пусть $A_n \subset X$ является конечной $\frac{1}{n}$-сетью компакта X, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{57.45}$$

Тогда множество A как счетная сумма конечных множеств является счетным множеством. Очевидно, A представляет собой и всюду плотное в X множество. В самом деле, какова бы ни была точка $x \in X$ и число $\varepsilon > 0$, выбрав n так, чтобы $1/n < \varepsilon$, и точку $a \in A_n$ так, чтобы $\rho(x, a) < 1/n$ (возможность такого выбора следует из определения $1/n$-сети), получим $\rho(x, a) < \varepsilon$, где $a \in A_n$, т. е. счетное множество A плотно в компакте X. □

Аналогично конечномерному случаю (см. п. 35.3) введем понятие покрытия множества.

Если E — подмножество некоторого множества X, то всякая система множеств $E_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов α) такая, что $E \subset \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} E_\alpha$, называется покрытием множества E.

Если покрытие $\{E_\alpha\}$ множества X состоит из конечного, соответственно счетного, множества множеств E_α, то оно называется *конечным*, соответственно *счетным*, *покрытием*.

ЛЕММА 7. *Из всякого покрытия сепарабельного метрического пространства открытыми множествами можно выделить конечное или счетное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}$ — покрытие сепарабельного метрического пространства X открытыми множествами G_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\{a_n\}$ — счетное всюду плотное в пространстве X множество и $\{r_m\}$ — каким-либо образом занумерованное множество всех рациональных чисел. Так как $\{G_\alpha\}$ покрытие пространства X, то для любой точки $x \in X$ существует содержащее ее множество $G\alpha_0 \in \{G_\alpha\} : x \in G\alpha_0$. Из открытости множества $G\alpha_0$ следует существование такого $\delta > 0$, что

$$U(x, \delta) \subset G_{\alpha_0}. \tag{57.46}$$

В силу плотности множества $\{a_n\}$ в пространстве X, найдется такое n, что

$$\rho(x, a_n) < \delta/2.$$

Выберем какое-либо рациональное число r_m так, чтобы

$$\rho(x, a_n) < r_m < \delta/2, \tag{57.47}$$

тогда

$$U(a_n, r_m) \subset G\alpha_0.$$

В самом деле, если

$$y \in U(a_n, r_m), \tag{57.48}$$

то

$$\rho(y, x) \leqslant \rho(y, a_n) + \rho(a_n, x) \underset{\substack{(57.47),\\(57.48)}}{<} r_m + r_m \underset{(57.47)}{<} \delta,$$

т. е.

$$y \in U(x, \delta) \underset{(47.46)}{\subset} G\alpha_0.$$

Таким образом, каждой точке $x \in X$ и каждому такому множеству $G\alpha_0 \in \{G_\alpha\}$, что $x \in G\alpha_0$, соответствует пара натуральных чисел (m, n), для которой

$$x \underset{(57.47)}{\in} U(a_n, r_m) \subset G\alpha_0. \tag{57.49}$$

Выберем для каждой из указанных окрестностей $U(a_n, r_m)$ по одному содержащему ее множеству G_α и обозначим его G_{mn} (среди множеств G_{mn} с разными индексами могут оказаться множества G_α с одинаковыми индексами, в таком случае выберем одно из них). Система $\{G_{mn}\}$, конечная или счетная, является подсистемой данной системы $\{G_\alpha\}$ и, в силу соотношения (57.49), образует покрытие пространств X. □

ЛЕММА 8. *В компакте любая последовательность непустых замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть X — компакт и $\{F_n\}$ — такая последовательность его замкнутых множеств, что

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \ldots . \tag{57.50}$$

Выберем в каждом F_n по точке x_n:

$$x_n \in F_n. \tag{57.51}$$

Из того, что X — компакт, следует, что последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x.$$

Для любого $k = 1, 2, \ldots$, в силу условий (57.50) и (57.51), все члены последовательности $\{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots\}$ принадлежат множеству F_{n_k}, а так как эта последовательность сходится к x и F_{n_k} — замкнутое множество, то $x \in F_{n_k}$ при любом n, т. е.

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_k}.$$

Но, в силу условия (57.50), имеет место равенство

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_n,$$

и, следовательно, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. □

ЛЕММА 9. *Пусть X — метрическое пространство и $\{G_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — его счетное покрытие открытыми множествами*:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n. \tag{57.52}$$

Положим

$$G_n^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{n} G_k, \tag{57.53}$$

$$F_n = X \setminus G_n^*, \tag{57.54}$$

тогда $\{G_n^*\}$ будет открытым покрытием пространства X:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^*, \tag{57.55}$$

множества G_n^* будут последовательно содержаться друг в друге:

$$G_1^* \subset G_2^* \subset \ldots \subset G_n^* \subset G_{n+1}^* \subset \ldots , \tag{57.56}$$

F_n будут замкнутыми множествами, последовательно вложенными друг в друга:

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots , \qquad (57.57)$$

с пустым пересечением:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing. \qquad (57.58)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если в метрическом пространстве пересечение любой последовательности непустых замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, не пусто, то из любого счетного покрытия этого пространства открытыми множествами можно выделить конечное покрытие.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если в сепарабельном метрическом пространстве пересечение любой последовательности непустых замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, не пусто, то из любого покрытия этого пространства открытыми множествами можно выделить конечное покрытие.*

Доказательство. Множества G_n^* (см. (57.53)) являются открытыми множествами, так как они представляют собой сумму конечной совокупности открытых множеств $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Поэтому из формулы (57.54) следует, что множества F_n являются замкнутыми. Из формул (57.53) следуют также соотношение

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^* \underset{(57.53)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} G_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \underset{(57.52)}{=} X$$

(это означает, что система $\{G_n^*\}$ образует покрытие пространства X) и включения (57.56). Из определения множеств F_n (см. (57.54)) и вложений (57.56) следуют включения (57.57). Наконец,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \underset{(57.54)}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n^*) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^* \underset{(57.55)}{=} X \setminus X = \varnothing. \square$$

Доказательство следствия 1. Если $\{G_n\}$ — счетное покрытие пространства X открытыми множествами и пересечение любой последовательности непустых замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, не пусто, то равенство (57.58) возможно только в том случае, если существует такой номер $n = n_0$, что множество F_{n_0} является пустым: $F_{n_0} = \varnothing$. В силу формул (57.54), это означает, что $X = G_{n_0}^*$, т. е. что

$$X = \bigcup_{k=1}^{n_0} G_k.$$

Таким образом, любое счетное покрытие $\{G_n\}$ пространства X содержит конечное $\{G_1, G_2, \ldots, G_{n_0}\}$. □

Доказательство следствия 2. Если метрическое пространство сепарабельно, то из любого его покрытия открытыми множествами можно, согласно лемме 7, выделить счетное покрытие, а из него по следствию 1 — конечное. □

ТЕОРЕМА 8. *Для того чтобы метрическое пространство было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого его покрытия открытыми множествами можно было выделить конечное покрытие.*

Доказательство. Необходимость сразу следует из теоремы 7, леммы 8 и следствия 2 леммы 9. Докажем достаточность.

Пусть из любого покрытия метрического пространства X открытыми множествами можно выделить конечное покрытие. Допустим, что X не является компактом, т. е. что существует последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, какова бы ни была точка $x \in X$, она не является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. Поэтому у каждой точки $x \in X$ найдется окрестность (обозначим ее через G_x), содержащая лишь конечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$. Таким образом, каждая точка $x \in X$ принадлежит соответствующему открытому множеству G_x, а это означает, что система всех множеств G_x образует покрытие пространства X:

$$\bigcup_{x \in X} G_x = X.$$

Согласно предположению, из этого покрытия можно выделить конечное покрытие пространства X. Пусть его образуют множества

$$G_{x_1},\ G_{x_2},\ \ldots,\ G_{x_n}. \tag{57.59}$$

Каждое множество этой системы содержит лишь конечное множество членов последовательности $\{x_n\}$. Следовательно, и все множества этой системы содержат только конечное множество членов рассматриваемой последовательности. Это, однако, невозможно, так как, покрывая пространство X, множества (57.59) должны содержать все элементы последовательности $\{x_n\}$, которых бесконечно много. Полученное противоречие доказывает, что множество X является компактом. □

Заметим, что так как для всякого подмножества X метрического пространства Y множество $G \subset X$ открыто в X тогда и только тогда, когда оно является пересечением с X открытого в Y множества, то в лемме 7 и в теореме 8 рассматриваемые там метрические пространства X могут являться подпространствами других метрических пространств Y и элементы покрытий $\{G_\alpha\}$ пространств X могут быть открытыми в Y множествами.

ТЕОРЕМА 9. *Для того чтобы сепарабельное метрическое пространство было компактом, необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность его непустых замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, имела непустое пересечение.*

Доказательство. Необходимость выполнения условий, сформулированных в теореме, для компактов составляет содержание леммы 8, а достаточность вытекает из следствия 2 леммы 9 и теоремы 8. □

ТЕОРЕМА 10. *Для любого конечного открытого покрытия компакта существует такое положительное число* (*называемое числом Лебега данного покрытия*), *что любое подмножество компакта, диаметр которого меньше этого числа, содержится по крайней мере в одном элементе покрытия.*

Доказывается эта теорема аналогично доказательству подобной теоремы для компактов, лежащих в конечномерных пространствах (см. п. 35.3, теорему 5).

57.7. Непрерывные отображения множеств

ТЕОРЕМА 11. *Непрерывный образ компакта является компактом.*

СЛЕДСТВИЕ. *При непрерывном отображении компакта образ каждого его замкнутого подмножества является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение компакта X в метрическое пространство Y и $\{V_\alpha\}$ — покрытие образа $f(X)$ пространства X открытыми в Y множествами V_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ множество $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$, согласно лемме 3, открыто, а так как $\{V_\alpha\}$ — покрытие множества $f(X)$, то $\{U_\alpha\}$ является покрытием компакта X. В силу теоремы 8, из покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выделить конечное покрытие

$U_1, U_2, \ldots, U_n$, а тогда множества $V_1 = f(U_1)$, $V_2 = f(U_2) < \ldots$, $V_n = f(U_n)$ будут образовывать конечное покрытие множества $f(X)$. Таким образом, из любого покрытия множества $f(X)$ открытыми множествами можно выделить конечное покрытие, а это означает (см. теорему 8), что множество $f(X)$ является компактом. □

Следствие вытекает из того, что всякое замкнутое подмножество компакта является компактом, и из того, что компакт всегда является замкнутым множеством.

ТЕОРЕМА 12. *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.*

Эта теорема доказывается дословно так же, как равномерная непрерывность непрерывного отображения компакта, лежащего в конечномерном пространстве (см. теорему 5 в п. 36.8).

Аналогично конечномерному случаю взаимно-однозначное непрерывное отображение одного метрического пространства на другое называется *гомеоморфизмом* (см. определение 5 в п. 36.7), если обратное отображение также непрерывно.

ТЕОРЕМА 13. *Взаимно-однозначное и непрерывное отображение компакта является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Если $f : X \to Y$ — непрерывное взаимно-однозначное отображение компакта X в метрическое пространство Y, то для любого замкнутого множества $F \subset X$ его образ, $f(F)$, т. е. прообраз F при обратном отображении f^{-1}, является компактом (теорема 11) и, следовательно, замкнутым множеством. Таким образом, при обратном отображении f^{-1} прообраз каждого замкнутого множества есть замкнутое множество, а поэтому, согласно лемме 4, отображение f^{-1} непрерывно. □

ТЕОРЕМА 14. *Если $f : X \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная действительнозначная функция, определенная на компакте X, то она ограничена на X и принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.*

Доказательство. Действительно, образом компакта X при отображении f является компакт $f(X)$, лежащий на числовой оси. Как и всякий компакт, он является, во-первых, ограниченным множеством, а во-вторых, замкнутым. В силу последнего, верхняя и нижние грани компакта, будучи его точками прикосновения, принадлежат ему. □

57.8. Связные множества

Введем теперь понятие связности в метрических пространствах.

Определение 14. *Метрическое пространство называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.*

Если пространство X несвязно, т. е. $X = A \cup B$, где $A \cap B = \varnothing$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, A и B — замкнутые множества, то, так как $A = X \setminus B$ и $B = X \setminus A$, A и B одновременно и открытые множества.

Примером связного множества является любой промежуток, конечный или бесконечный, числовой оси. Примером несвязного множества является объединение двух непересекающихся отрезков.

УПРАЖНЕНИЯ. 15. Доказать, что всякое линейно связное в пространстве R^n множество (см. определение 27 в п. 35.2) является связным.

16. Доказать, что объединение двух связных пересекающихся множеств является связным множеством.

17. Доказать, что если множество E метрического пространства связно и $E \subset E_1 \subset \overline{E}$, то множество E_1 также связно.

18. Связный непустой компакт называется континуумом. Доказать, что пересечение последовательности континуумов, последовательно вложенных друг в друга, является континуумом.

ТЕОРЕМА 15. *Непрерывный образ связного множества связен.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение связного метрического пространства X на метрическое пространство Y и пусть $Y = A \cup B$, где A и B — непересекающиеся замкнутые множества. Тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, где $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ также непересекающиеся замкнутые множества (см. лемму 4). Так как X — связное множество, то это возможно только в том случае, когда одно из множеств $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$ пусто, тогда пусто и одно из множеств A или B. Это и означает связность пространства Y. □

57.9. Критерий Арцела компактности систем функций

Если замыкание множества метрического пространства является компактом, то само множество называется *предкомпактным*.

Предкомпактность множества означает, что из всякой его последовательности точек можно выделить сходящуюся под-

последовательность, но, быть может, не к точке самого множества.

В силу теоремы 5, для того чтобы множество, лежащее в полном метрическом пространстве, было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограничено. Это следует из того, что всякое подмножество вполне ограниченного множества также вполне ограничено. Задача о выяснении предкомпактности того или иного множества, лежащего в некотором заданном метрическом пространстве, часто встречается в математическом анализе. Поэтому большой интерес представляют критерии компактности или предкомпактности множеств для различных конкретных метрических пространств. Рассмотрим вопрос о предкомпактности множеств для одного из важнейших пространств $C[a, b]$, состоящего из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, для которых введена метрика

$$\rho(f, g) = \max_{[a,\, b]} |f(x) - g(x)|, \quad f \in C[a, b], \quad g \in C[a, b] \qquad (57.60)$$

(см. пример 4 в п. 57.1 и пример в п. 57.3).

Определение 15. *Семейство $S = \{f\}$ функций f, принадлежащих пространству $C[a, b]$, называется равномерно ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $f \in S$ и всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство*

$$|f(x)| \leqslant c. \qquad (57.61)$$

Согласно определению (57.60), это равносильно тому, что $\rho(f, 0) \leqslant c$, $f \in S$, что, в свою очередь, равносильно тому, что множество S ограничено в метрическом пространстве $C[a, b]$.

Определение 16. *Семейство $S = \{f\}$ функций $f \in C[a, b]$ называется равностепенно непрерывным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $f \in S$ и всех $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$, для которых $|x_2 - x_1| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon. \qquad (57.62)$$

ТЕОРЕМА 15 (теорема Арцела*). *Для того чтобы семейство $S = (f)$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций было предкомпактно в пространстве $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

* Ч. Арцела (1847—1912) — итальянский математик.

Доказательство. Необходимость. Если множество $S \subset C[a, b]$ предкомпактно, то его замыкание $\overline{S}$ является компактом, а следовательно, ограниченным множеством (см. следствие теоремы 5). Поэтому ограниченным множеством является и само множество S, иначе говоря, семейство S равномерно ограничено.

Кроме того, так как замыкание $\overline{S}$ множества S является компактом, то оно вполне ограничено; следовательно, вполне ограничено и само множество S, а это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве $C[a, b]$ для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть. Пусть ее образуют функции

$$f_1(x), \ \dots, \ f_n(x). \tag{57.63}$$

Каждая из них, будучи непрерывной на отрезке $[a, b]$, является на нем и равномерно непрерывной, и так как функций (57.63) лишь конечное множество, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [a, b]$, $x' \in [a, b]$, для которых $|x' - x| < \delta$, и всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется неравенство

$$|f_i(x') - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{57.64}$$

В силу определения $\frac{\varepsilon}{3}$-сети, для любой функции $f \in S$ существует такая функция $f_{i_0}(x)$, что

$$\rho(f, f_{i_0}) \underset{(57.60)}{=} \max_{[a, b]} |f(x) - f_{i_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{57.65}$$

Поэтому если $|x' - x| < \delta$, то для любой функции $f \in S$ имеем

$$|f(x') - f(x)| \leqslant |f(x') - f_{i_0}(x')| + |f_{i_0}(x') - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f(x)| <$$

$$< 2 \max_{[a, b]} |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x') - f_{i_0}(x)| \underset{\substack{(57.64),\\(57.65)}}{<} \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Это и означает, что семейство 5 равностепенно непрерывно.

Достаточность. Пусть семейство функций S равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Пространство $C[a, b]$ полное, поэтому, для того чтобы доказать, что семейство S предкомпактно, достаточно показать, что оно вполне ограничено, т. е. что для множества S в пространстве $C[a, b]$ при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Построим ее. Пусть все функции $f \in S$ удовлетворяют условию (57.61), и для произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ выбрано $\delta > 0$ так, что для любых точек

$x \in [a, b]$, $x' \in [a, b]$, для которых $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5}. \qquad (57.66)$$

Возьмем какое-либо разбиение $\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ отрезка $[a, b]$ мелкости, меньшей δ, и разбиение $\{y_i\}_{j=0}^{j=m}$ отрезка $[-c, c]$ мелкости, меньшей $\varepsilon/5$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b,$$

$$x_i - x_{i-1} < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$-c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_m = c,$$

$$y_j - y_{j-1} < \frac{\varepsilon}{5}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \qquad (57.67)$$

Через точки $(x_i, 0)$, $i = 0, 1, \dots, n$, проведем прямые, параллельные оси Oy, а через точки $(0, y_j)$, $j = 0, 1, \dots, m$, — прямые, параллельные оси Ox. Тогда получится разбиение τ прямоугольника $\{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, -c \leqslant y \leqslant c\}$, в котором лежат графики всех функций семейства S, на прямоугольники с длинами сторон, параллельных оси Ox, меньшими δ, и параллельных оси Oy, меньшими $\varepsilon/5$.

Рассмотрим множество A всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, графиками которых являются ломаные, вершины которых лежат в вершинах (x_i, y_j) прямоугольников разбиения τ. Множество A, очевидно, конечное, так как конечным является множество всех вершин (x_i, y_j), $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Докажем, что множество A является ε-сетью для множества S. Выберем произвольно функцию $f \in S$. Для этой функции и для каждого x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, обозначим через (x_i, y_{j_i}) ближайшую к точке $(x_i, f(x_i))$ точку вида (x_i, y_j), лежащую на прямой $x = x_i$; тогда

$$|f(x_i) - y_{j_i}| < \frac{\varepsilon}{5}. \qquad (57.68)$$

Сопоставим функции f непрерывную функцию $f_0 \in A$, графиком которой является ломаная, проходящая через вершины (x_0, y_{j_0}), (x_1, y_{j_1}), ..., (x_i, y_{j_i}), ..., (x_n, y_{j_n}), т. е. (рис. 11)

$$f_0(x_i) = y_{j_i}. \qquad (57.69)$$

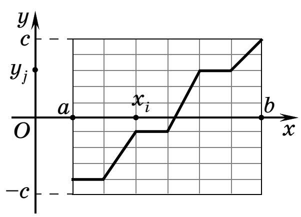


Рис. 11

Оценим разность значений функции f_0 для соседних вершин:

$$|f_0(x_i) - f_0(x_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant |f_0(x_i) - f(x_i| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - f_0(x_{i-1})| \underset{\substack{(57.66), (57.68), \\ (57.69)}}{<}$$

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{3}{5}\varepsilon. \qquad (57.70)$$

В силу линейности функции f_0 на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, для любой точки $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеет место неравенство

$$|f_0(x) - f_0(x_{i-1})| < |f_0(x_i) - f_0(x_{i-1})| \underset{(57.70)}{<} \frac{3}{5}\varepsilon. \qquad (57.71)$$

Теперь оценим расстояние $\rho(f, f_0)$ между функциями f и f_0 в пространстве $C[a, b]$. Для каждой точки $x \in [a, b]$ найдется содержащий ее отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, а для каждой точки этого отрезка имеем

$$|f(x) - f_0(x)| \leqslant |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - f_0(x_{i-1})| +$$

$$+ |f_0(x_{i-1}) - f_0(x)| \underset{\substack{(57.66), \\ (57.68), (57.69), \\ (57.71)}}{<} \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

Отсюда

$$\rho(f, f_0) \underset{(57.60)}{=} \max_{[a, b]} |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon,$$

т. е., действительно, множество A является ε-сетью для S. □

Теорема Арцела обобщается на случай отображения компактов в метрические пространства.

§ 58
Линейные нормированные и полунормированные пространства

58.1. Линейные пространства

Определение 1. *Множество* $X = \{x, y, z, \ldots\}$ *называется действительным линейным пространством* (*или векторным пространством над полем действительных чисел*), *если*:

каждой упорядоченной паре (x, y) *элементов* $x \in X$ *и* $y \in X$ *поставлен в соответствие единственный элемент пространства* X, *называемый суммой* x *и* y *и обозначаемый* $x + y$;

каждому элементу $x \in X$ *и каждому действительному числу* λ *поставлен в соответствие единственный элемент пространства* X, *называемый произведением* λ *на* x *и обозначаемый* λx.

При этом выполняются следующие группы аксиом:

1. а) $x + y = y + x$ *для любых* $x \in X$ *и* $y \in X$;

б) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *для любых* $x \in X$, $y \in X$ *и* $z \in X$;

в) *в* X *существует элемент, называемый нулевым и обозначаемый* 0, *такой, что* $x + 0 = x$ *для любого* $x \in X$;

г) *для каждого* $x \in X$ *существует элемент множества* X, *называемый противоположным элементу* x, *обозначаемый через* $-x$ *и такой, что* $x + (-x) = 0$.

2. а) $1x = x$ *для любого* $x \in X$;

б) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\, x$ *для любого* $x \in X$ *и любых действительных чисел* λ *и* μ;

в) $(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x$ *для любого* $x \in X$ *и любых действительных чисел* λ *и* μ;

г) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ *для любых* $x \in X$, $y \in Y$ *и любого действительного числа* λ.

Для каждой пары элементов $x \in X$ и $y \in Y$ элемент $x + (-y)$ называется *разностью элементов* x и y и обозначается через $x - y$.

Если в приведенном определении действительного линейного пространства всюду заменить действительные числа комплексными: $\lambda, \mu \in \boldsymbol{C}$, то получится определение *комплексного линейного пространства*.

Если x_0 и a — заданные элементы линейного пространства, то множество всех точек x этого пространства вида $x = x_0 + at$, $-\infty < t < +\infty$, называется прямой, проходящей через точку x_0 в направлении вектора a.

Примеры. 1. Множество всех действительных (комплексных) чисел образует действительное (комплексное) линейное пространство.

2. Пусть E — некоторое множество. Совокупность $F(E)$ всех функций $f : E \to \boldsymbol{R}$ (соответственно $f : E \to \boldsymbol{C}$) при естественном определении их сложения и умножения на действительное (комплексное) число:

$$(f_1 + f_2)(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x), \quad (\lambda f)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda(f(x)),$$

$$f_1 \in F(E), \quad f_2 \in F(E), \quad f \in F(E), \quad \lambda \in \boldsymbol{R} \text{ или } \lambda \in \boldsymbol{C}$$

является действительным (комплексным) линейным пространством.

3. Множество всех многочленов от одной переменной с действительными (комплексными) коэффициентами является линейным действительным (комплексным) пространством.

4. Множество всех многочленов степеней, не превышающих заданного натурального числа n, от одной переменной с действительными (комплексными) коэффициентами является действительным (комплексным) линейным пространством.

5. Пространство всевозможных числовых последовательностей $\{x_n\}$, $x_n \in \boldsymbol{R}$ (или $x_n \in \boldsymbol{C}$), $n \in \boldsymbol{N}$, при естественном определении операций их сложения и умножения на число (см. п. 4.8) также является линейным пространством.

Если X — линейное пространство и $x_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то всякий элемент вида $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$, где λ_k — действительные числа в случае действительного пространства и комплексные — в случае комплексного пространства, называется *линейной комбинацией элементов* $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 2. *Множество X', содержащееся в линейном пространстве X (действительном или комплексном), называется подпространством этого пространства, если все линейные комбинации элементов множества X' содержатся в нем.*

Иначе говоря, множество $X' \subset X$ является подпространством пространства X, если для любых двух элементов $x \in X'$ и $y \in X'$ и любых чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ (соответственно $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\mu \in \boldsymbol{C}$) имеет место включение

$$\lambda x + \mu x \in X'.$$

Очевидно, что подпространство X' линейного пространства X, в свою очередь, является линейным пространством. Если X — линейное пространство и $x \in X$, то совокупность всех элементов пространства X вида λx, где λ — всевозможные числа, служит примером подпространства пространства X.

Множество функций, действительнозначных и непрерывных на некотором множестве $E \in \boldsymbol{R}^n$, является подпространством пространства всех действительнозначных функций, определенных на E.

Элементы линейных пространств обычно называются *точками* или *векторами*.

Определение 3. *Конечная система векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства X (действительного или комплексного) называется линейно зависимой, если существуют такие*

числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (*соответственно действительные или комплексные*), *не все равные нулю, что*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0. \qquad (58.1)$$

В противном случае, т. е. когда из равенства (58.1) *следует, что все числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *равны нулю, система векторов* $x_1, \ldots, x_n$ *называется линейно независимой.*

Определение 4. *Система векторов* x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — *некоторое множество индексов*) *линейного пространства* X *называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема* $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ *линейно независима.*

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Доказать, что если система x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, линейно независима, то $x_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

2. Доказать, что, для того чтобы конечная система векторов была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из них являлся линейной комбинацией остальных.

Определение 5. *Совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов, принадлежащих некоторому заданному множеству, называется линейной оболочкой этого множества.*

Линейная оболочка элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначается

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Определение 6. *Пространство* (*действительное или комплексное*), *в котором имеется система* n *линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых оно является, называется* n*-мерным.*

Всякая упорядоченная система n*-линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является* n*-мерное пространство, называется его базисом.*

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис n-мерного пространства X, если:

1) векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы;

2) для каждого $x \in \boldsymbol{R}^n$ существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n. \qquad (58.2)$$

Элементы n*-мерного пространства называются* n*-мерными векторами* (*соответственно действительными или комплексными*).

Каждое n*-мерное пространство называется конечномерным.*

УПРАЖНЕНИЯ. 3. Доказать, что в n-мерном пространстве каждая система линейно независимых векторов, линейной оболочкой которых является все пространство, состоит из n векторов.

4. Доказать, что каждая система из n линейно независимых векторов в n-мерном пространстве является его базисом.

Примером n-мерного действительного пространства является n-мерное арифметическое векторное пространство (см. п. 35.4).

Аналогично этому пространству может быть построено комплексное арифметическое n-мерное пространство $\boldsymbol{C}^n$. Его точками называются упорядоченные системы n комплексных чисел: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_j \in \boldsymbol{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$. При этом если $x \in \boldsymbol{C}^n$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, то

$$\lambda x \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

и для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \boldsymbol{C}^n$

$$x + y \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Базисом в этом пространстве являются векторы $e_i = \{\delta_1^i, \dots, \delta_n^i\}$, где δ_j^i — так называемый *символ Кронекера**;

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, т. е. выполняется условие (58.2).

Другим примером конечномерного линейного пространства является пространство $\mathcal{P}^n$ многочленов, имеющих действительные коэффициенты и степени, не превышающие некоторого неотрицательного целого n.

Поскольку степень нулевого многочлена равна $-\infty$ (см. п. 5.3), она меньше любого неотрицательного числа. Поэтому нулевой многочлен принадлежит любому пространству $\mathcal{P}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Очевидно, что $\mathcal{P}^n = L(1, x, x^2, \dots, x^n)$, т. е. пространство $\mathcal{P}^n$ многочленов степеней, не превышающих n, является линейной оболочкой степенных функций $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Покажем, что оно является $(n + 1)$-мерным. Каждый его элемент имеет вид

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

* Л. Кронекер (1823—1891) — немецкий математик.

т. е. является линейной комбинацией $n + 1$ степеней переменной x, т. е. функций $x_0 = 1$, x, x^2, ... , x^n. Докажем, что эти функции образуют базис в пространстве $\mathcal{P}^n$. Для этого надо убедиться, что они линейно независимы. Пусть в пространстве $\mathcal{P}^n$ некоторая линейная комбинация рассматриваемых степеней равна нулю:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0, \tag{58.3}$$

т. е. многочлен $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ тождественно равен нулю и, следовательно, во всех точках числовой оси принимает те же значения, что и нулевой многочлен:

$$p_0(x) = 0 + 0x + \ldots + 0x^n,$$

а в этом случае (см. п. 13.2) коэффициенты этих многочленов равны, т. е.

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ \ldots,\ a_n = 0, \tag{58.4}$$

что и означает линейную независимость степеней $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Отметим, что из того, что два многочлена, принимающих одинаковые значения на каком-нибудь интервале числовой оси, имеют одинаковые коэффициенты (см. п. 13.2), следует, что степени $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы на любом промежутке числовой оси, не вырождающемся в точку.

Впрочем, то, что из выполнения условия (58.3) на некотором промежутке числовой оси, не вырождающемся в точку, следуют равенства (58.4), легко показать и непосредственно. Для этого можно, например, продифференцировать тождество (58.3) n раз; тогда получим

$$n!a_n = 0,$$

откуда $a_n = 0$.

Если уже доказано, что для некоторого k, $0 < k < n$, имеют место равенства $a_{k+i} = \ldots = a_n = 0$, то тождество (58.3) принимает вид

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k = 0.$$

Продифференцировав его k раз, получим $a_k = 0$. Таким образом, выполняются все равенства (58.4).

Будем говорить, что векторы $y_1, \ldots, y_n$ линейного пространства X выражаются через векторы $x_1, \ldots, x_n$ того же пространства с помощью матрицы (a_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, если

$$y_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если векторы $x_1, \dots, x_n$ образуют базис пространства и матрица (a_{ij}) невырожденная, т. е. $\det (a_{ij}) \neq 0$, то векторы $y_1, \dots, y_n$ также образуют базис.

В самом деле, если

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0,$$

то

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + \lambda_n(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) = 0,$$

т. е.

$$(\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n})x_1 + \dots + (\lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_n a_{nn})x_n = 0;$$

отсюда, в силу линейной независимости векторов $x_1, \dots, x_n$, следует, что

$$\begin{gathered} \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_n a_{nn} = 0, \end{gathered}$$

определитель этой однородной системы линейных уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ по условию не равен нулю: $\det (a_{ij}) \neq 0$. Следовательно, эта система имеет единственное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, что означает линейную независимость векторов $y_1, \dots, y_n$. Поэтому они являются базисом рассматриваемого пространства.

В частности, если векторы $y_1, \dots, y_n$ выражаются через базис $x_1, \dots, x_n$ с помощью треугольной матрицы, т. е. матрицы (a_{ij}) вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{58.5}$$

(т. е. если $j > i$, то $a_{ij} = 0$) с диагональными элементами $a_{11}, \dots, a_{nn}$, не равными нулю, то векторы $y_1, \dots, y_n$ также являются базисом, так как в этом случае

$$\det (a_{ij}) = a_{11}a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0.$$

В качестве примера рассмотрим $(n + 1)$-мерное пространство $\mathcal{P}^n$ многочленов степеней, не превышающих натурального числа n. Как было выше показано, степени $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют базис этого пространства. Рассмотрим произвольную систему многочленов

$$p_k(x) \equiv a_{k0} + a_{k1}x + \dots + a_{kk}x^k \in \mathcal{P}^n, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

где многочлен $p_k(x)$ имеет точно степень k: $a_{kk} \neq 0$, $k = 0, 1, n$. Тогда очевидно, что эти многочлены выражаются через степени $1, x, x^2, \ldots, x^n$ с помощью треугольной матрицы (58.5), диагональные элементы a_{kk} которой не равны нулю. Поэтому каждая указанная система многочленов линейно независима и образует базис в пространстве $\mathcal{P}^n$.

Отметим еще, что так как линейная зависимость многочленов означает наличие соответствующих линейных соотношений между их коэффициентами, то она не зависит от того, на каком промежутке (не вырождающемся в точку) числовой оси меняются аргументы этих многочленов. Поэтому линейная зависимость многочленов в пространстве $\mathcal{P}^n$ равносильна их линейной зависимости на любом из указанных промежутков.

В качестве конкретных примеров рассмотрим некоторые часто встречающиеся в анализе специальные многочлены.

Примеры. 6. Многочлены

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

называются многочленами Лежандра.

Легко убедиться, что

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d^n x^{2n}}{dx^n} + \ldots \right) = \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены более низкого, чем n, порядка многочлена $P_n(x)$. Следовательно, полином Лежандра $P_n(x)$ имеет степень n, поэтому полиномы Лежандра $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}^n$. Это, в частности, означает, что всякий многочлен степени, не превышающей n, является их линейной комбинацией.

Выбор коэффициентов $\frac{1}{2^n n!}$ у производных $\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$ при определении полиномов Лежандра объясняется тем, что при таком выборе для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется условие $P_n(1) = 1$.

7. Многочлены

$$T_0(x) = 1, \; T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos (n \arccos x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

называются многочленами Чебышёва.

Прежде всего убедимся, что $T_n(x)$ является многочленом степени n. Из формулы Муавра (см. п. 23.1) следует, что

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$
$$= \cos^n\varphi + iC_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + i^2 C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ i^3C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + i^4C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots .$$

Приравняем действительные части получившегося равенства

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots , \qquad (58.6)$$

в зависимости от четности n последним слагаемым будет либо $\sin^n\varphi$ (если n четное), либо $C_n^{n-1}\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi$ (если n нечетное). Заметим, что в правую часть равенства (58.6) входят только синусы в четных степенях и поэтому, применив подстановку $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ для каждого слагаемого правой части, получим

$$C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi = C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi(1-\cos^2\varphi)^k =$$
$$= (-1)^kC_n^{2k}\cos^n\varphi + \ldots ,$$

где многоточие означает, что в остальных слагаемых $\cos\varphi$ имеет меньшую, чем n, степень. В результате из (58.6) будем иметь

$$\cos n\varphi = (1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots)\cos^n\varphi + \ldots =$$
$$= 2^{n-1}\cos^n\varphi + \ldots , \qquad (58.7)$$

где справа многоточие означает линейную комбинацию степеней косинусов $\cos^{n-1}\varphi$, $\cos^{n-2}\varphi$, ..., 1 (мы воспользовались тем, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна 2^{n-1}). Положив в равенстве (58.7) $\varphi = \arccos x$, а следовательно, $\cos\varphi = x$ и разделив обе части равенства на 2^{n-1}, получим $\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x = T_n(x)$, где, в силу доказанного, в правой части стоит многочлен степени n с коэффициентом, равным 1, при x^n. Итак, $T_n(x)$ — многочлен степени n. Поэтому, согласно доказанному выше, многочлены Чебышёва $T_0(x)$, $T_1(x)$, ... , $T_n(x)$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}^n$.

Если Y и Z подмножества линейного пространства X, то через $Y + Z$ обозначается множество всех элементов x пространства X, представимых в виде $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$.

Множество $Y + Z$ называется (алгебраической) *суммой множеств Y и Z*.

Если множества Y и Z являются подпространствами пространства X, то множество $Y + Z$ также является подпространством пространства X. Действительно, путь $x_1 \in Y + Z$, $x_2 \in Y + Z$ и λ_1, λ_2 — числа. Согласно определению суммы множеств, элементы x_1 и x_2 представимы в виде $x_1 = y_1 + z_1$ и $x_2 = y_2 + z_2$, $y_1, y_2 \in Y$, $z_1, z_2 \in Z$. Поэтому $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 (y_1 + z_1) + \lambda_2(y_2 + z_2) = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$. Так как Z и Y — подпространства, то $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in Y$, $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in Z$. В силу определения суммы $Y + Z$, отсюда следует, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in Y + Z$. Это и означает, что множество $Y + Z$ является подпространством. Сумму двух подпространств Y и Z называют прямой и пишут $Y \oplus Z$, если пересечение $Y \cap Z$ подпространств Y и Z состоит только из нулевого элемента. Для этого необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент $x \in Y + Z$ был единственным образом представим в виде $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$.

В самом деле, если $Y \cap Z = \{0\}$ и $y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in Y$, $z_1, z_2 \in Z$, то $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. Так как Y и Z — подпространства, то $y_1 - y_2 \in Y$, $z_2 - z_1 \in Z$, т. е. элемент $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ принадлежит одновременно к Y и к Z и поэтому равен нулю: $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$. Отсюда следует, что $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

С другой стороны, если $x \in Y \cap Z$, $x \neq 0$, то $x = x + 0 = 0 + x$, т. е. элемент x имеет не единственное представление в виде $x = y + z$, где $y \in Y$, $z \in Z$.

Определение 7. *Отображение f линейного пространства X в линейное пространство Y называется линейным отображением (или, что то же, линейным оператором), если для любых двух элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Линейные операторы, множества значений которых содержатся в множествах действительных или комплексных чисел, называются *функционалами*.

Множество линейных операторов $f : X \to Y$, отображающих линейное пространство X в линейное пространство Y, обозначается через $\mathfrak{L}(X; Y)$. Легко непосредственно проверить, что множество $\mathfrak{L}(X; Y)$ при естественном определении сложения его элементов и умножения их на число, т. е. при определении этих операций по формулам

$$(f_1 + f_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x),\ f_1 \in \mathfrak{L}(X; Y),\ f_2 \in \mathfrak{L}(X; Y),$$

$$(\lambda f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(f(x)),\ f \in \mathfrak{L}(X; Y),\ \lambda \in \boldsymbol{R} \text{ или } \lambda \in \boldsymbol{C},\ x \in X,$$

образует также линейное пространство (действительное, если пространства X и Y были действительными линейными пространствами, и комплексное, если они были комплексными).

Определение 8. *Если $f : X \to Y$, X и Y — линейные пространства, то множество $\{x : f(x) = 0\} \subset X$ называется ядром отображения f и обозначается через* $\ker f$*:

$$\ker f \overset{\text{def}}{=} \{x : f(x) = 0\}.$$

Отметим, что нуль всегда входит в ядро линейного отображения. Действительно, если $f : X \to Y$ — линейное отображение, то нуль пространства X отображается в нуль пространства Y:

$$f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0) = 0,$$

т. е. $0 \in \ker f$.

ЛЕММА 1. *Для того чтобы линейное отображение $f : X \to Y$ линейного пространства X в линейное пространство Y было взаимно-однозначным отображением X в Y, т. е. было инъекцией, необходимо и достаточно, чтобы его ядро состояло только из нулевого элемента*:

$$\ker f = 0. \qquad (58.8)$$

Доказательство необходимости. Выше было показано, что любой линейный оператор f переводит нуль в нуль. Поэтому если f — инъекция, то не существует $x \neq 0$ такого, что $f(x) = 0$. Это и означает, что $\ker f = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть выполняется условие (58.8) и $f(x) = f(y)$. Тогда, в силу линейности отображения f, имеем $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, т. е. $x - y \in \ker f$, и так как $\ker f = 0$, то $x - y = 0$. Следовательно, $x = y$. Это и означает, что f — инъекция. □

Примером линейных взаимно-однозначных отображений являются прямое и обратное преобразования Фурье в соответствующих линейных пространствах функций (см. леммы 3 и 4 в п. 56.5).

ЛЕММА 2. *Ядро всякого линейного отображения одного линейного пространства в другое является подпространством отображаемого пространства.*

---

* От англ. kernel — ядро.

Доказательство. Если f — линейное отображение линейного пространства X в некоторое другое линейное пространство, то для любых элементов $x_1 \in \ker f$, $x_2 \in \ker f$ и любых чисел λ_1, λ_2 имеем

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(x_2) = 0$$

и, следовательно, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \ker f$, а это и означает, что ядро $\ker f$ является подпространством пространства X. □

Определение 9. *Пусть X и Y — линейные пространства. Линейное взаимно-однозначное отображение пространства X на пространство Y называется изоморфным отображением или изоморфизмом линейных пространств.*

Если для линейных пространств X и Y существует изоморфное отображение X на Y, то они называются изоморфными.

Два изоморфных пространства могут отличаться лишь природой своих элементов, а не свойствами линейного пространства как такового, поэтому в дальнейшем часто мы не будем различать изоморфные линейные пространства.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать, что все n-мерные линейные действительные пространства изоморфны между собой.

Определение 10. *Линейное пространство, не являющееся конечномерным, называется бесконечномерным.*

Очевидно, что линейное пространство является бесконечномерным тогда и только тогда, когда оно не имеет конечного базиса.

Примером бесконечномерного пространства является линейное пространство всех многочленов от одной переменной. Действительно, это пространство заведомо не имеет конечного базиса: любая линейная комбинация заданной конечной системы многочленов является многочленом степени не выше степени старшего многочлена из указанной системы, и поэтому многочлены больших степеней не могут быть получены указанным способом.

Попытка обобщить понятие базиса в случае бесконечномерных пространств приводит к бесконечным суммам, т. е. рядам вида $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Для того чтобы имело смысл говорить об их сумме в пространстве X в нем должно быть определено понятие сходимости последовательностей. Рассмотрению одного такого вида пространств посвящен п. 58.2.

Определение 11. *Произведением* $Z = X \times Y$ *линейных пространств* X *и* Y *называется линейное пространство* Z, *элементами которого являются элементы* $z = (x, y)$ *теоретико-множественного произведения множеств* X *и* Y (*т. е. множество всевозможных пар* (x, y), *где* $x \in X$, $y \in Y$ (см. п. 1.2), *для которых определена линейная операция* $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, $z_1 = (x_1, y_1) \in Z$, $z_2 = (x_2, y_2) \in Z$, λ_1 *и* λ_2 — *числа* (*действительные или комплексные*), *по формуле*

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \overset{\text{def}}{=} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2).$$

Выполнимость аксиом линейного пространства при таком определении линейной операции легко устанавливается непосредственной проверкой.

Аналогично понятию произведения двух линейных пространств определяется понятие произведения n линейных пространств для любого натурального n.

Отметим один нужный для дальнейшего тип отображений произведений линейных пространств.

Определение 12. *Отображение* $z = f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, *произведения* $X \times Y$ *линейных пространств* X *и* Y *в линейное пространство* Z *называется билинейным* (*или билинейной формой*), *если при фиксировании одной из переменных* x, y *оно линейно относительно другой переменной.*

Таким образом, если $z = f(x, y)$ — билинейное отображение, то для любых чисел λ_1 и λ_2, действительных или комплексных, имеют место равенства

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y),\ x_1 \in X,\ x_2 \in X,\ y \in Y,$$

$$f(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 f(x, y_1) + \lambda_2 f(x, y_2),\ x \in X,\ y_1 \in Y,\ y_2 \in Y.$$

Отсюда следует, что для любых чисел λ_1, λ_2, μ_1, μ_2

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \lambda_1 \mu_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 \mu_1 f(x_2, y_1) + \\ + \lambda_1 \mu_2 f(x_1, y_2) + \lambda_2 \mu_2 f(x_2, y_2). \tag{58.9}$$

Если $X = Y$ и отображение $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$, является билинейной формой, то отображение $f(x, x)$, обозначаемое $f(x)$, называется *квадратичной формой*, соответствует данной билинейной.

Примеры. 8. Скалярное произведение (x, y) в n-мерном линейном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ является билинейным отображением $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}$.

9. Векторное произведение трехмерных векторов является билинейным отображением $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3$ в $\boldsymbol{R}^3$.

10. Билинейная форма $A(x, y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, является билинейным отображением $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}$.

Билинейные отображения $f: X \times Y \to Z$ образуют линейное пространство при естественном определении линейных операций над этими отображениями: если $f_1: X \times Y \to Z$ и $f_2: X \times Y \to$ $\to Z$ — два билинейных отображения, то для любых $x \in X$, $y \in Y$ и любых чисел λ_1, λ_2 билинейное отображение $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ определяется равенством $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x, y) \overset{\text{def}}{=} \lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y)$, т. е. согласно общему правилу арифметических действий над функциями. По аналогии с билинейными отображениями вводится понятие мультилинейных отображений: если X_1, X_2, ..., X_n, Y — линейные пространства, то отображение $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, произведения $X_2 \times$ $\times X_2 \times \dots \times X_n$ в Y называется *мультилинейным*, если оно линейно относительно каждой переменной x_i, когда остальные $n - 1$ переменных фиксированы.

58.2. Норма и полунорма

Определение 13. *Линейное пространство X (действительное или комплексное) называется полунормированным, если на множестве его точек определена действительная функция, называемая полунормой, обозначаемая $\|x\|_X$ или $\|x\|$, $x \in X$, и имеющая следующие свойства:*

1^0 (неотрицательность). *Для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|x\| \geqslant 0$.*

2^0 (однородность). *Для всех $x \in X$ и всех чисел λ имеет место равенство $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.*

3^0 (неравенство треугольника). *Для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.*

Из свойства 2^0 полунормы следует, что $\|0\| = 0$ (здесь в левой части равенства стоит нуль пространства X, а в правой — нуль множества действительных чисел). В самом деле, фиксируя произвольно элемент $x \in X$, получим

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| \underset{2^0}{=} 0\|x\| = 0.$$

Полунорма, удовлетворяющая условию:

4^0 (невырожденность). *Если $\|x\| = 0$, то $x = 0$ называется нормой.*

Линейное пространство, в котором задана норма, называется *нормированным*.

Согласно определению 13, норма является и полунормой.

Из свойства 3^0 полунормы легко следует, что для любых двух элементов x и y линейного полунормированного пространства выполняется неравенство

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|. \qquad (58.10)$$

В самом деле,

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \underset{3^0}{\leqslant} \|x - y\| + \|y\|,$$

поэтому

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

Аналогично

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\| \underset{2^0}{=} \|x - y\|.$$

Из последних двух неравенств и следует неравенство (58.10).

Отметим, что всякое подмножество линейного полунормированного (в частности, нормированного) пространства, являющееся подпространством линейного пространства, в свою очередь, является линейным полунормированным (соответственно нормированным) пространством.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Выяснить, будут ли выражения $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f^{(n)}(t)|$, $\int\limits_a^b |f^{(n)}(t)|dt$ нормой; полунормой; для каких функций; для каких n.

58.3. Примеры нормированных и полунормированных пространств

1. Множество действительных чисел и множество комплексных чисел, если в них за норму взять абсолютную величину чисел, образуют линейные нормированные пространства.

2. Если в действительном линейном n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ норму вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ определить как его длину (см. п. 18.4)

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

то оно будет линейным нормированным пространством и будет обозначаться тем же символом $\boldsymbol{R}^n$.

Функция

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2},$$

где $1 \leqslant m < n$ является полунормой.

3. Комплексное арифметическое n-мерное пространство $\boldsymbol{C}^n$ (см. п. 57.2) будет нормированным, если положить

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}, \; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n.$$

4. В действительном арифметическом n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ можно ввести не только норму, совпадающую с длиной $|x|$ его элементов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $x \in \boldsymbol{R}^n$. Например, положим

$$\|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=} (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|.$$

Очевидно, длина вектора (см. пример 2) совпадает с нормой $\|x\|_2$, называемой квадратичной. Проверим выполнение аксиом норм для $\|x\|_r$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$. При $r = 1$ по свойству абсолютной величины чисел

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

При $1 < p < +\infty$ применим неравенство Минковского (см. п. 30.8*):

$$\|x + y\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Для $\|x\|_\infty$ имеем

$$\|x + y\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i + y_i| \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,n} (|x_i| + |y_i|) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=1,2,\ldots,n} \|x_i\| + \max_{i=1,2,\ldots,n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Остальные свойства норм для $\|x\|_r$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, проверяются еще проще. Отметим, что функции

$$\|x\|_p^{(m)} = (|x_1|^p + \ldots + |x_m|^p)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\|x\|_\infty^{(m)} = \max_{i=1,2,\ldots,m} |x_i|$$

при $1 \leqslant m < n$ являются полунормами, но не нормами.

УПРАЖНЕНИЕ 7. Доказать, что $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Определение 14. *Две нормы $\|x\|$ и $\|x\|^*$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство*

$$c_1\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant c_2\|x\|. \qquad (58.11)$$

Примером эквивалентных норм в линейном пространстве являются нормы $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ и $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Более того, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X — конечномерное действительное линейное пространство (случай комплексного пространства рассматривается аналогично). Следовательно, в нем существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, состоящий из некоторого числа $n \in N$ его элементов, и для любого $x \in X$ имеется, и притом единственное, разложение

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Пусть $\|x\|$ — некоторая норма в пространстве X. Покажем, что она эквивалентна квадратичной норме

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Поскольку две нормы, каждая из которых эквивалентна третьей, также эквивалентны между собой, из этого и будет следовать, что все нормы любого конечномерного пространства эквивалентны.

Прежде всего заметим, что $c_1 \stackrel{\text{def}}{=} \|e_1\| + \dots + \|e_n\| > 0$, так как для всех $k = 1, 2, \dots, n$ имеет место неравенство $e_k \neq 0$, и, следовательно, $\|e_k\| > 0$. Далее, из очевидного неравенства

$$|x_k| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|_2, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

получим, используя свойство нормы, неравенство

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leqslant |x_1|\, \|e_1\| + \dots + |x_n|\, \|e_n\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|e_1\| + \dots + \|e_n\|)\, \|x\|_2 = c_1 \|x\|_2.$$

Итак, существует такое $c_1 > 0$, что для любого $x \in X$

$$\|x\| \leqslant c_1 \|x\|_2.$$

Докажем теперь, что существует такое $c_2 > 0$, что

$$\|x\| \geqslant c_2 \|x\|_2.$$

Поскольку в случае $x = 0$ это неравенство очевидно выполняется при любом $c_2 > 0$, его достаточно доказать лишь для $x \neq 0$.

Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве X так, чтобы он состоял из единичных в смысле квадратичной нормы векторов

$$\|e_1\|_2 = \ldots = \|e_n\|_2 = 1.$$

Это всегда возможно, так как если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — какой-то базис линейного пространства, а $\|\cdot\|$ — какая-либо норма в этом пространстве, то

$$\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$$

также будет его базисом, причем норма всех его элементов будет равна 1:

$$\left\|\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\| = \frac{1}{\|e_k\|}\|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пространство X с выбранным базисом можно рассматривать как арифметическое n-мерное пространство (см. п. 35.1). Для этого достаточно каждому его вектору $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ сопоставить упорядоченный набор n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ — его координат относительно указанного базиса. При этом квадратичная норма $\|x\|_2$ является длиной вектора x:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x|.$$

Единичная сфера $S^{n-1} = \{x : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ этого пространства является, как известно (см. пп. 35.2 и 35.3), компактом. Рассмотрим на ней функцию

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \|x\|.$$

Из неравенства

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant$$
$$\leqslant c_1\|x - y\|_2 = c_1|x - y|, \; x \in X, \, y \in Y,$$

следует, что эта функция непрерывна на всем пространстве X и, следовательно, на сфере S^{n-1}.

Так как для любой точки $x \in S^{n-1}$ имеем $\|x\|_2 = 1$, то $x \neq 0$, поэтому, в силу свойства 4^0 нормы, функция f удовлетворяет на сфере S^{n-1} неравенству $f(x) = \|x\| > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса, всякая непрерывная на компакте функция достигает на нем своего минимального значения. Пусть функция f достигает свой минимум на сфере S^{n-1} в некоторой точке $x_0 \in S^{n-1}$. Положим

$$c_2 \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in S^{n-1}} f(x) = f(x_0) > 0.$$

Тогда для любого $x \in S^{n-1}$ будем иметь

$$\|x\| = f(x) \geqslant f(x_0) = c_2.$$

Теперь, заметив, что для каждого $x \in x$, $x \neq 0$, точка $\frac{x}{\|x\|_2}$ лежит на сфере S^{n-1}:

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| = \frac{1}{\|x\|_2}\|x\|_2 = 1$$

и, следовательно, для нее $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geqslant c_2$, получим

$$\|x\| = \left\|\|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \|x\|_2 \geqslant c_2 \|x\|_2,$$

т. е.

$$\|x\| \geqslant c_2 \|x\|_2, \quad x \in X, \quad x \neq 0.$$

Эквивалентность норм $\|x\|$ и $\|x\|_2$ доказана. □

Примеры. 5. Пусть снова $1 \leqslant p < +\infty$. Рассмотрим линейное подпространство всех последовательностей $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in \boldsymbol{R}$ (или $x_n \in \boldsymbol{C}$), состоящее из таких последовательностей, для которых

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < +\infty. \tag{58.12}$$

Функция $\|x\|_p$ является нормой, что проверяется аналогично конечному случаю (см. пример 4), так как, в частности, неравенство Минковского справедливо и для бесконечных сумм.

В том случае, когда все элементы рассматриваемых последовательностей — действительные числа, их пространство с нормой (58.12) обозначается через l_p.

Соответствующее метрическое пространство в случае $p = 2$ было рассмотрено в примере 6 п. 57.1.

6. Линейное пространство всех ограниченных действительных функций, определенных на произвольном множестве E, являющееся подпространством пространства $F(E)$ всех действительных функций $f\colon E \to \boldsymbol{R}$ (см. п. 57.1), превращается в нормированное, если в нем ввести норму по формуле

$$\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{t \in E} |f(t)|. \tag{58.13}$$

Обозначим это пространство через $B(E)$*. В том случае, когда E является метрическим пространством, подпространство про-

* B — первая буква английского слова bounded — ограниченный.

странства $B(E)$, состоящее из непрерывных на E функций f, обозначим через $C(E)$, а норму (58.13) в этом пространстве будем обозначать также и через $\|f\|_C$.

Если E является компактом в $\boldsymbol{R}^n$, то (см. теорему 3 в п. 19.5)

$$\|f\|_C = \sup_{t \in E} |f(t)| = \max_{t \in E} |f(t)|.$$

В частности, это верно для пространства $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ числовой прямой.

7. Пусть фиксировано число p, $1 \leqslant p < +\infty$. Рассмотрим множество функций f, заданных на некотором конечном или бесконечном промежутке с концами $x = a$ и $x = b$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \leqslant +\infty$, для каждой из которых существует правильное разбиение этого промежутка (см. п. 55.1) и интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

сходится. Это множество образует, как легко проверить, линейное пространство и обозначается $RL_p = RL_p(a, b)$*.

В случае, когда рассматриваемый промежуток с концами a и b является отрезком $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, то соответствующее пространство RL_p будем обозначать $RL_p[a, b]$.

Положим

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(t)|^p dx\right]^{1/p}. \qquad (58.14)$$

Покажем, что (58.14) является полунормой в $RL_p(a, b)$. Из формулы (58.14), очевидно, сразу следует, что $\|f\|_p \geqslant 0$. При этом из условия $\|f\|_p = 0$ не следует, что $f = 0$. В самом деле, пусть $-\infty < a < b < +\infty$; рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = a, \\ 0 & \text{при} \quad x \in (a, b]. \end{cases}$$

Ясно, что $\|f_p\| = 0$, но функция f не равна тождественно нулю на отрезке $[a, b]$ и поэтому не является нулем линейного пространства $RL_p[a, b]$.

Проверим однородность выражения (58.14): для всех $f \in \in RL_p(a, b)$ и любого $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (или $\lambda \in \boldsymbol{C}$) имеем

$$\|\lambda f\|_p = \left[\int_a^b |\lambda f(t)|^p dt\right]^{1/p} = |\lambda| \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} = |\lambda| \, \|f\|_p.$$

* R — первая буква фамилии Б. Римана (B. Riemann), а L — первая буква фамилии А. Лебега (H. Lebesque).

Докажем для (58.14) неравенство треугольника. Для любых $f \in RL_p(a, b)$ и $g \in RL_p(a, b)$, согласно неравенству Минковского для интегралов (см. п. 28.2*), получим

$$\|f + g\|_p = \left[\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)^p dt\right]^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Итак, действительно, $\|f\|_p$ является полунормой (не являющейся нормой) в линейном пространстве $RL_p\,(a, b)$.

8. Рассмотрим множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Оно является линейным пространством. Мы уже знаем, что в нем можно ввести норму $\|f\|_C$, определенную в примере 6 этого пункта. Можно в нем рассмотреть и полунорму (58.14), причем в этом пространстве полунорма (58.14) является уже нормой.

Действительно, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\|f\|_p = 0, 1 \leqslant p < +\infty$, и, следовательно,

$$\int_a^b |f(x)|^p dt = 0,$$

то из неотрицательности и непрерывности функции $|f(x)|^p$, $x \in [a, b]$ следует (см. свойство 9^0 интеграла в п. 24.1), что $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ *функций с нормой* (58.14) *обозначается через* $CL_p[a, b]$.

Подобным же образом строятся аналогичные пространства для функций, заданных на промежутках других типов, в том числе и на бесконечных промежутках, например, пространства

$$CL_p(a, b), \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

которые состоят из непрерывных функций, заданных на интервале (a, b), и для которых конечен интеграл (58.14).

Если одно и то же множество функций принадлежит различным линейным нормированным или полунормированным пространствам (например, пространства $C[a, b]$ и $CL_p[a, b]$ состоят из одних и тех же функций), то часто бывает полезным оценить одну норму (полунорму) этих функций через другую. Теоремы, выражающие подобные оценки, называются обычно *теоремами вложения*.

Поясним сказанное на примере, сформулированном в виде леммы.

ЛЕММА 3. *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, $1 < p < +\infty$. *Если* $f \in RL_p[a, b]$, *то*

$$\|f\|_1 \leqslant (b-a)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{58.15}$$

а если $f \in RL_p[a, b] \cap B[a, b]$, *то*

$$\|f\|_p \leqslant (b-a)^{1/p} \|f\|_\infty. \tag{58.16}$$

Доказательство. Принимая во внимание, что полунорма $\|f\|_p$ определяется по формуле (58.14), получим, используя неравенство Гельдера (см. п. 28.2*),

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \cdot 1 dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \left[\int_a^b dx\right]^{1/q} = (b-a)^{1/q} \|f\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тем самым (58.15) доказано. Неравенство (58.16) также сразу вытекает из определений (58.13) и (58.14) соответствующих норм:

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b [\sup_{[a,\, b]} |f(t)|]^p dt\right\}^{1/p} =$$

$$= \|f\|_\infty \left(\int_a^b dt\right)^{1/p} = (b-a)^{1/p} \|f\|_\infty. \ \square$$

Замечание. Отметим, что неравенство (58.15) справедливо очевидным образом и без предположения, что $f \in RL_p[a, b]$, так как если $f \notin RL_p[a, b]$, то $\|f\|_p = +\infty$ (см. (58.14)), и поэтому неравенство (58.15) выполняется очевидным образом. Аналогично неравенство (58.16) тривиально в случае, когда $f \notin B[a, b]$, так как тогда $\|f\|_\infty = +\infty$; конечно, как обычно, здесь предполагается, что для рассматриваемых функций существует правильное разбиение отрезка $[a, b]$ (см. п. 55.1).

УПРАЖНЕНИЕ 8. Обозначим через $C^1L_2[a, b]$ подмножество пространства $CL_2[a, b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Доказать, что множество $C^1L_2[a, b]$ является линейным нормированным пространством, если под нормой функции $f \in C^1L_2[a, b]$ понимать ее норму в пространстве $CL_2[a, b]$.

58.4. Свойства полунормированных пространств

В полунормированных пространствах можно ввести понятие сходящейся последовательности и ее предела.

Определение 15. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *элементов полунормированного (в частности, нормированного) линейного пространства* X *такова, что существует элемент* $x \in X$ *такой, что* $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$, *то последовательность* $\{x_n\}$ *называют сходящейся по полунорме (соответственно по норме) к элементу* x *и пишут* $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Вводя в каком-либо линейном пространстве функций различные полунормы (в частности, нормы), будем получать различные понятия сходимости последовательностей функций. Например, сходимость в смысле нормы (57.13) означает равномерную сходимость; сходимость в смысле полунормы (57.14) является уже сходимостью другого рода: она называется *сходимостью в среднем*, или, подробнее, в смысле p-среднего (иногда говорят и просто о сходимости в смысле пространства L_p). Мы уже встречались с частным случаем сходимости такого рода при $p = 1$ (см. лемму 2 в п. 55.2, следствие теоремы 2 в п. 56.7 и метрику (57.2)) и при $p = 2$ (в следствии из теоремы 12 п. 55.9). При $p = 2$ сходимость в среднем называется также сходимостью *в смысле среднего квадратичного*.

Неравенства (58.15) и (58.16) между различными полунормами функций позволяют установить связь между различными видами сходимостей функций.

Например, пусть последовательность функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, и функция f таковы, что:

1^0. *Последовательность* $\{f_n\}$ *сходится равномерно на отрезке* $[a, b]$ *к функции* f.

2^0. *При всех* $n = 1, 2, \ldots$, $f_n - f \in RL_p[a, b] \cap RL_p[a, b]$.

Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f на отрезке $[a, b]$ и в смысле p-среднего, $1 \leqslant p < +\infty$.

В самом деле, в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$, последовательность $\{f_n - f\}$ ограничена и, следовательно, $f_n - f \in B[a, b] \cap RL_p[a, b]$. Поэтому, согласно (58.16), справедливо неравенство

$$\|f_n - f\|_p \leqslant (b - a)^{1/p} \|f_n - f\|_\infty.$$

Равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на отрезке $[a, b]$ означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Следовательно,
$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

*УПРАЖНЕНИЕ 9**. Построить пример последовательности непрерывных неотрицательных на отрезке функций, сходящейся в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.

Следует обратить внимание на то, что в полунормированном пространстве у сходящейся последовательности предел, вообще говоря, не единствен. При этом если $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, то полунорма разности двух пределов равна нулю: $\|a - b\| = 0$. Это сразу следует из неравенства
$$\|a - b\| \leqslant \|a - x_n\| + \|x_n - b\|.$$
Верно и обратное: если $a = \lim_{n \to \infty} x_n$ и $\|a - b\| = 0$, то и $b = \lim_{n \to \infty} x_n$. В самом деле, из неравенства
$$\|x_n - b\| = \|(x_n - a) + (a - b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|a - b\| = \|x_n - a\|$$
вытекает, что если $\lim_{n \to \infty} \|x_n - a\| = 0$, то и $\lim_{n \to \infty} \|x_n - b\| = 0$.

Наглядно неединственность предела в полунормированных функциональных пространствах можно проиллюстрировать на примере пространства $RL[a, b]$: последовательность функций $f_n(x) = 1/n$, $a \leqslant x \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится по полунорме этого пространства и ее пределами являются, например, функции $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$ и функция g: $g(x) = 0$ при $a \leqslant x < b$ и $g(b) = 1$.

Определение 16. *Пусть X — линейное полунормированное (в частности, нормированное) пространство. Множество $E \subset X$ называется ограниченным или, подробнее, ограниченным по полунорме (соответственно по норме), если существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $\|x\| \leqslant M$.*

ЛЕММА 4. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится по полунорме в X, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x = \lim_{n \to \infty} x_n$; в силу сходимости последовательности, существует такое n_0, что если $n > n_0$, то $\|x_n - x\| \leqslant 1$ и, следовательно,
$$\|x_n\| = \|(x_n - x) + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\| \leqslant \|x\| + 1.$$

Положим $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0}\|, \|x\| + 1\}$; тогда, очевидно, для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $\|x_n\| \leqslant M$. □

Для линейного пространства с полунормой можно определить понятие непрерывности его отображения в другое полунормированное пространство.

Определение 17. *Отображение $f : X \to Y$ полунормированного (в частности, нормированного), пространства X в полунормированное (нормированное) пространство Y называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 по полунорме (норме) пространства X: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ по полунорме (норме) пространства Y: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

В случае нормированных пространств непрерывность отображения в смысле норм равносильна его непрерывности в смысле метрик, порожденных этими нормами (см. лемму 6 в п. 58.5).

В терминах неравенств непрерывность в точке x_0 отображения f полунормированного пространства X в полунормированное пространство Y формулируется следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, для которых $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Эквивалентность двух сформулированных выше определений непрерывности доказывается по той же схеме, что и в случае, когда X и Y — множества действительных чисел (см. п. 5.7).

ЛЕММА 5. *Полунорма $\|x\|$ является непрерывной функцией на полунормированном пространстве X.*

Доказательство. Пусть заданы элемент $x \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда для всех таких x, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$, в силу неравенства (58.10), имеем $|\|x\| - \|x_0\|| < \|x - x_0\| < \varepsilon$, т. е. условие непрерывности функции на X выполняется при выборе $\delta = \varepsilon$. □

Определение 18. *Пусть X и Y — линейные полунормированные (в частности, нормированные) пространства. Отображение f, изоморфно отображающее пространство X как линейное пространство на пространство Y (см. определение 9) и такое, что для любого $x \in X$ справедливо равенство*

$$\|x\|_X = \|f(x)\|_Y,$$

называется изоморфным отображением или изоморфизмом линейных полунормированных (нормированных) пространств.

Если для линейных полунормированных (нормированных) пространств X и Y существует изоморфное отображение X на Y, то они называются изоморфными.

Например, если (a, b) — конечный интервал, то соответствие, при котором каждой функции полунормированного пространства $RL_p[a, b]$ ставится в соответствие ее сужение на интервал (a, b), является линейным отображением пространства $RL_p[a, b]$ на пространство $RL_p(a, b)$ (сюръекцией), сохраняющим полунорму. Последнее следует из того, что значение интеграла от a до b от функции не зависит от значений этой функции или от их отсутствия в точках $x = a$ и $x = b$. Ядро отображения состоит не только из нуля, а из всевозможных функций, равных тождественно нулю на интервале (a, b) и принимающих на его концах произвольные значения (отсюда следует, что эта сюръекция не является биекцией).

Сужение на интервал (a, b) непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций отображает нормированное пространство $CL_p[a, b]$ не на пространство, а только в пространство $CL_p(a, b)$ (не каждую непрерывную на интервале (a, b) функцию можно продолжить с сохранением непрерывности на отрезок $[a, b]$), но зато в этом случае указанное сужение является взаимно-однозначным отображением (инъекцией), поскольку оно сохраняет значение нормы). Оно является изоморфным отображением пространства $CL_p[a, b]$ на его образ в пространстве $CL_p(a, b)$ (всякая инъекция является биекцией при отображении множества на образ).

Два изоморфных полунормированных (нормированных) пространства могут отличаться друг от друга только природой своих элементов, а не свойствами пространства. Поэтому в дальнейшем мы часто не будем различать изоморфные полунормированные (нормированные) пространства, состоящие из различных элементов: элементы таких пространств можно «отождествлять».

Поясним это подробнее. Пусть X и Y^* линейные полунормированные пространства, $Y \subset Y^*$, а $f : X \to Y$ — изоморфное отображение. Рассмотрим множество $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$, получающееся из пространства X присоединением к нему множества $Y^* \setminus Y$. Таким образом, $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Определим для элементов множества X^* операции сложения и умножения на число, а также норму — они будут снабжаться индексом X^*. Для удобства введем отображение $F : X^* \to Y^*$, задаваемое формулой

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X, \\ x, & \text{если } x \in X^* \setminus X. \end{cases} \tag{58.17}$$

Ясно, что F является взаимно-однозначным отображением (биекцией) множества X^* на Y^*.

Теперь для любых $x \in X^*$, $y \in X^*$ и любых чисел λ, μ положим

$$(\lambda x + \mu y)_{X^*} \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}[\lambda F(x) + \mu F(y)],$$

$$\|x\|_{X^*} \stackrel{\text{def}}{=} \|F(x)\|_{Y^*}.$$

Так, определенное пространство X^* является линейным полунормированным (нормированным), изоморфным пространству Y^* и содержащим X в качестве своего подмножества. Под утверждением «отождествим в пространстве Y^* множество Y с изоморфным ему пространством X» и понимается рассмотрение указанного выше пространства X^* (сравните с отождествлением изометрических метрических пространств п. 57.1).

УПРАЖНЕНИЯ. 10. Пусть X — линейное полунормированное пространство. Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются *эквивалентными*, если $\|x - y\| = 0$. Обозначим через $\tilde{X}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства X. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ — число. Определим $\tilde{x} + \tilde{y}$ как элемент множества $\tilde{X}$, содержащий $x + y$, а $\lambda\tilde{x}$ — как элемент из $\tilde{X}$, содержащий λx. Положим $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X$. Доказать, что данные определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, и что $\tilde{X}$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$.

11. Доказать, что функции $x + y$ и λx непрерывны на всяком линейном полунормированном пространстве X (x и y — элементы этого пространства, а λ — число), иначе говоря, что операции сложения и умножения на число непрерывны в указанном пространстве.

58.5. Свойства нормированных пространств

В линейном нормированном пространстве X можно естественным образом ввести расстояние между элементами этого пространства. Именно: справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Линейное нормированное пространство X является метрическим пространством с метрикой*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{58.18}$$

при этом сходимость последовательностей в пространстве X по этой метрике совпадает со сходимостью по норме.

Доказательство. Функция $\rho(x, y)$, определенная формулой (58.18), действительно является расстоянием: свойства расстояния (см. п. 57.1) вытекают из свойств нормы 1^0—4^0 (проверьте это). Второе утверждение леммы очевидно. □

Будем говорить, что *метрика* (58.18) *порождается заданной нормой пространства* X. Например, метрика, порожденная нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ в арифметическом линейном пространстве n-мерных вещественных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, является метрикой евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$, определенной формулой (35.1).

Не всякое метрическое пространство является нормированным, например пространство, состоящее из двух точек x и y (двоеточие) с метрикой $\rho(x, y) = 1$, не есть линейное, а поэтому не нормированное пространство.

Последовательность точек пространства X, фундаментальная относительно метрики (58.18) (см. п. 57.2), называется также *фундаментальной относительно нормы*, заданной в пространстве X.

УПРАЖНЕНИЕ 12. Доказать, что множество в линейном нормированном пространстве ограничено по норме (см. определение 16 в п. 58.4) тогда и только тогда, когда оно ограничено как множество метрического пространства в смысле метрики (58.18).

Пример. Рассмотрим пространство l_p последовательностей действительных чисел с нормой (58.12). Обозначим через e_n последовательность, у которой n-й член равен единице, а все остальные — нули. Очевидно, что при $n \neq m$

$$\|e_n - e_m\| = (1 + 1)^{1/p} = 2^{1/p}.$$

Поэтому последовательность элементов $e_n = 1, 2, \dots$, пространства l_p не может содержать фундаментальной, а следовательно, и сходящейся подпоследовательности.

Последовательность $\{e_n\}$ ограничена, так как для всех n имеем $\|e_n\| = 1$. Она образует замкнутое множество в l_p, так как множество $\{e_n\}$ не имеет предельных точек в l_p (в противном случае в ней нашлась бы сходящаяся подпоследовательность).

Таким образом, в бесконечномерном линейном нормированном пространстве могут существовать ограниченные последовательности, из которых нельзя выделить сходящуюся, а также ограниченные замкнутые множества, у которых не из всякой последовательности их точек можно выделить сходящуюся.

Замечание 1. Если в линейном пространстве X введены две нормы элементов $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$, причем они эквивалентны (см. определение 14 в п. 58.3), то последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к элементу $x \in X$ в смысле нормы $\|\cdot\|^{(1)}$ тогда и только тогда, когда она сходится к x в смысле нормы $\|\cdot\|^{(2)}$.

Действительно, в силу эквивалентности норм $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$, существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что выполняются неравенства

$$c_1 \|x_n - x\|^{(2)} \leqslant \|x_n - x\|^{(1)} \leqslant c_2 \|x_n - x\|^{(2)}.$$

Из этих неравенств сразу и следует эквивалентность сходимостей последовательности $\{x_n\}$ к x в смысле норм $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$.

Из доказанной в п. 58.3 эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве (теорема 1) следует, что сходимости последовательностей его точек по всем нормам эквивалентны. Сходимость по квадратичной норме $\|x\|_2$ равносильна покоординатной сходимости (см. пп. 18.1 и 18.4), поэтому сходимость последовательности точек в конечномерном пространстве по любой норме равносильна сходимости числовых последовательностей координат рассматриваемых точек относительно произвольного базиса.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что в случае, когда полунорма не является нормой, даже такая простая функция, как линейная на конечномерном линейном полунормированном пространстве, может оказаться не непрерывной. Рассмотрим, например, двумерное арифметическое пространство X векторов $x = (x_1, x_2)$ с полунормой $\|x\| = |x_1|$. Это действительно полунорма, так как $\|x\| = |x_1| \geqslant 0$. Кроме того, для любого числа λ имеем $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ и поэтому $\|\lambda x\| = |\lambda x_1| = |\lambda|\,|x_1| = |\lambda|\,\|x\|$. Наконец, если $y = (y_1, y_2)$ также является элементом из X, то $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$; следовательно, $\|x + y\| = |x_1 + y_1| \leqslant |x_1| + |y_1| = \|x\| + \|y\|$. Таким образом, все свойства полунормы выполнены.

Покажем, что линейная функция $f(x) = x_2$ не непрерывна на X. Действительно, для последовательности $x^{(n)} = (1/n, 1)$ любая точка вида $x = (0, x_2)$ (x_2 произвольно) является ее пределом в смысле рассматриваемой полунормы:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

В частности, точка $O = (0, 0)$ является пределом последовательности $\{x^{(n)}\}$. Однако

$$\lim f(x^{(n)}) = 1 \neq 0 = f(O).$$

Это и означает, что функция $f(x) = x_2$ не является непрерывной по полунорме $\|x\| = |x_1|$.

Подчеркнем еще, что в конечномерном пространстве всякая линейная функция будет непрерывна относительно нормы этого пространства. Действительно, пусть X — n-мерное линейное нормированное пространство и f — линейный функционал на X. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в X и, следовательно, любой элемент $x \in X$ представим и притом единственным образом в виде $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Поскольку f — линейный функционал, то

$$f(x) = f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n) =$$
$$= a_1x_1 + \dots + a_nx_n,$$

где $a_k = f(e_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, — фиксированные для f числа. Вспоминая, что сходимость последовательности точек по любой норме в конечномерном пространстве эквивалента ее покоординатной сходимости, сразу убеждаемся, что из полученной формулы $f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ действительно следует непрерывность функции f.

ЛЕММА 7. *Норма является непрерывной функцией на линейном нормированном пространстве в смысле метрики* (58.18).

В силу равенства (58.18) это следует из того, что полунорма непрерывна по полунорме (см. лемму 5 в п. 58.4).

Определение 19. *Линейное нормированное пространство называется полным, если оно является полным метрическим пространством в смысле метрики, порождаемой нормой данного пространства.*

Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Линейное нормированное пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (58.13) является банаховым пространством. Мы в этом убедились в п. 57.1, когда рассматривали метрическое пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием (57.1), которое как раз порождается нормой (58.13). Мы видели, что полнота пространства $C[a, b]$ следует из того, что сходимость последовательности в этом пространстве означает ее равномерную сходимость на отрезке $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое линейное нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.*

Доказательство. Согласно теореме 4 п. 57.5, достаточно показать, что на пополнение X^* линейного нормированного пространства X, рассматриваемого как метрическое с метрикой (58.18), можно продолжить с X алгебраические операции и норму. Это можно сделать с помощью предельного перехода.

Пусть, например, $x \in X^*$ и $y \in X^*$. В силу плотности X в X^*, существуют последовательности $x_n \in X$ и $y_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \ \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Покажем, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Действительно,

$$\rho(x_n + y_n, x_m + y_m) = \|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(x_n - x_m)\| + \|y_n - y_m\| = \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m).$$

Из сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что они фундаментальные, поэтому последовательность $\{x_n + y_n\}$ также фундаментальная и, следовательно, в силу полноты X^*, сходящаяся.

Положим, по определению,

$$x + y = \lim_{n \to \infty} (x_n + y_n).$$

Аналогично с помощью предельного перехода определяется и λx, $x \in X^*$:

$$\lambda x \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \lambda x_n,$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $x \in X^*$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$.

Легко проверить, что определенные так алгебраические операции $x + y$, λx для элементов пополнения X^* не зависят от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Также легко убедиться, что в случае, когда элементы принадлежат исходному пространству X, определенные нами алгебраические операции совпадают с заданными.

Определим теперь норму для $x \in X^*$. Пусть $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Покажем, что числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальная. В самом деле, из неравенства (58.10) для всех натуральных n и m имеем

$$|\,\|x_n\| - \|x_m\|\,| \leqslant \|x_n - x_m\| = \rho(x_n, x_m). \tag{58.19}$$

Последовательность $\{x_n\}$, будучи сходящейся, является и фундаментальной, поэтому из неравенства (58.19) следует, что и

числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальна, а значит, сходится.

Положим, по определению,

$$\|x\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

Так определенная норма $\|x\|$, $x \in X^*$, не зависит от выбора последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, такой, что $x_n \to x$. Легко проверить также, используя предельный переход, что для функции $\|x\|$, $x \in X^*$, выполняются свойства нормы 1^0—4^0 и что в случае $x \in X$ мы получаем прежнюю норму. □

В качестве примера отметим линейное нормированное пространство $CL_p[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (58.13). Эта норма при $p = 1$ порождает метрику (57.2). Можно показать, что метрическое пространство непрерывных функций с метрикой (57.2) не является полным. Согласно доказанной теореме, рассматриваемое линейное нормированное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций можно дополнить до полного пространства. Это банахово пространство обозначается $L[a, b]$.

Определение 20. *Система элементов* x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — *некоторое множество индексов*) *линейного полунормированного пространства* X *называется полной в этом пространстве, если для каждого элемента* $x \in X$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существуют такие элементы* $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}$ *данной системы и такие числа* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, *что выполняется неравенство*

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n})\| < \varepsilon. \qquad (58.20)$$

Сформулируем это определение несколько иначе, введя предварительно еще одно понятие.

Определение 21. *Множество* $A \subset X$ *называется плотным в полунормированном пространстве* X, *если для любого элемента* $x \in X$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такой элемент* $a \in A$, *что*

$$\|x - a\| < \varepsilon.$$

Если X — нормированное и, следовательно, метрическое пространство, то определение 21, в силу (58.18), приводит к тому же понятию плотности множества, что и определение 8 из п. 57.5. Теперь можно сказать:

система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ — *полна в пространстве* X, *если множество конечных линейных комбинаций ее элементов, т. е. ее линейная оболочка* (*см. определение* 5 *в п.* 58.1) *образует плотное в* X *множество.*

Если X является нормированным пространством, то в нем, как во всяком метрическом пространстве, имеет смысл понятие замыкания множества, а поскольку плотность некоторого множества в метрическом пространстве означает, что замыкание этого множества совпадает с самим пространством (см. определение 8 в п. 57.5), то в этом случае определение 21 можно перефразировать и таким образом:

система элементов x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — *некоторое множество индексов*), *линейного нормированного пространства* X *называется полной, если замыкание ее линейной оболочки* (см. п. 58.1) *совпадает со всем пространством* X.

С частным случаем понятия полноты для системы функций мы уже встречались в п. 55.8.

Определение 22. Если *в линейном нормированном пространстве* X *существует счетное множество элементов, образующее полную систему пространства* X, *то пространство* X *называется сепарабельным.*

Заметим, что если пространство X сепарабельно как линейное нормированное пространство, то оно сепарабельно и как метрическое пространство с метрикой (58.18). В самом деле, если в линейном нормированном пространстве X существует счетная полная система, то это означает, что замыкание множества конечных линейных комбинаций элементов этой системы совпадает со всем пространством, а тогда, как в этом нетрудно убедиться, со всем пространством совпадает и множество конечных линейных комбинаций элементов рассматриваемой системы только с рациональными коэффициентами, а таких линейных комбинаций лишь счетное множество (см. следствие теоремы 10 в п. 4.11*). Таким образом, в пространстве X имеется счетное плотное в нем множество.

В заключение этого пункта введем понятие базиса, а предварительно — понятие ряда в пространстве X.

Определение 23. *Пусть* x_n, $n = 1, 2, \dots$, — *последовательность элементов линейного нормированного пространства* X. *Положим* $s_n = x_1 + \dots + x_n$, $n = 1, 2, \dots$; *пара последовательностей* $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ *называется рядом* (*с общим членом* x_n) *и обозначается*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n; \tag{58.21}$$

элементы s_n *называются n-ми частичными суммами ряда* (57.21).

Если последовательность s_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в пространстве X, то ряд (58.21) называется *сходящимся*. В этом случае предел $s = \lim_{n \to \infty} s_n$ последовательности s_n, $n = 1, 2, \ldots$, называют *суммой ряда* (58.21) и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

Таким образом, как и в случае числовых рядов, мы будем одним и тем же символом $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ обозначать как сам ряд, так и его сумму, если он сходится.

Как и для числовых рядов, для рядов в линейных нормированных пространствах справедливы следующие утверждения.

Если ряд (58.21) *сходится, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$, *причем если* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda s$.

Если в пространстве X сходятся два ряда, то сходится и ряд, общий член которого равен сумме их членов с одинаковыми номерами, и его сумма равна сумме сумм данных рядов.

Определение 24. *Последовательность элементов e_n, $n = 1, 2, \ldots$, линейного нормированного пространства X называется его базисом, если, каков бы ни был элемент $x \in X$, существует, и притом единственная, последовательность чисел λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n. \tag{58.22}$$

Таким образом, если последовательность $\{e_n\}$ является базисом пространства X, то для каждого элемента $x \in X$ существует, и притом единственная, последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{58.23}$$

Следовательно, всякий базис является полной системой элементов. Формула (58.22) называется разложением элемента x по базису $\{e_n\}$.

Нетрудно убедиться, что если система элементов $\{e_n\}$ образует базис, то она линейно независима. Это сразу следует из единственности разложения элементов пространства по базису. В самом деле, если бы элементы e_n, $n = 1, 2, \ldots$, оказались линейно

зависимыми, то среди них нашлось бы конечное множество таких $e_{n_1}, \ldots, e_{n_k}$, что для некоторых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, которые не все равны нулю, имело бы место равенство $\lambda_1 e_{n_1} + \ldots + \lambda_k e_{n_k} = 0$, т. е. получилось бы разложение нуля по элементам базиса с коэффициентами, которые не все равны нулю. Для нуля же имеется тривиальное разложение $0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0\, e_n$, поэтому было бы нарушено условие единственности разложения элементов по базису.

Если линейное нормированное пространство имеет базис, состоящий из конечного или счетного множества элементов, то это пространство сепарабельно. Действительно, нетрудно проверить, что множество всех конечных линейных комбинаций элементов указанных базисов с рациональными коэффициентами счетно и плотно во всем пространстве.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем отличие между последовательностью элементов, образующих полную систему, и последовательностью элементов, образующих базис. В первом случае коэффициенты λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, в неравенстве (58.20) зависят, вообще говоря, не только от выбора элемента $x \in X$, но и от выбора числа ε. Во втором же случае коэффициенты λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, в неравенстве (58.23) определяются только самим элементом (они называются *коэффициентами разложения элемента x по данному базису* или *координатами элемента x при данном базисе*) и лишь их количество, т. е. число n_ε, зависит от выбора ε.

Существуют сепарабельные банаховы пространства, в которых нет базиса.

В следующем параграфе будет рассмотрен более узкий класс пространств, в которых базис всегда существует.

58.6. Линейные операторы

Изучим теперь некоторые свойства линейных отображений одного линейного нормированного пространства в другое. Такие отображения, как и в конечномерном случае, называют обычно линейными операторами. Мы будем обозначать их буквами A, B, ... и для краткости часто вместо $A(x)$ будем писать просто Ax.

В п. 41.6 для линейного оператора $A : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ была введена норма по формуле (см. (41.41))

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |Ax|, \quad x \in \boldsymbol{R}^n.$$

Это действительно норма, в смысле определения п. 58.2, в линейном пространстве $\mathfrak{L}(\boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{R}^m)$, что будет следовать из дальнейшего рассмотрения.

Пусть X и Y — произвольные линейные нормированные пространства и $A : X \to Y$ — линейный оператор. Положим

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|, \tag{58.24}$$

где $\|x\| = \|x\|_X$ и $\|Ax\| = \|Ax\|_Y$.

В случае произвольно выбранных линейных пространств X и Y может оказаться, что верхняя грань $\|A\|$, определяемая равенством (58.24), не будет конечной для всякого линейного оператора $A : X \to Y$.

Пусть $\mathfrak{L}(X : Y)$, как всегда (см. п. 58.1), множество всех линейных операторов A, отображающих пространство X в пространство Y, а $\mathscr{L}(X; Y)$ — множество тех из них, для которых $\|A\| < +\infty$. Покажем, что $\mathscr{L}(X; Y)$ также является линейным пространством, а $\|A\|$ — нормой в нем. Если $A \in \mathscr{L}(X; Y)$ и $B \in \mathscr{L}(X; Y)$, то

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A + B)x\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Ax + Bx\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| =$$
$$= \|A\| + \|B\| < +\infty$$

и, следовательно, $A + B \in \mathscr{L}(X; Y)$. Для любого $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (или $\lambda \in \boldsymbol{C}$ в случае комплексных пространств)

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda| \, \|A\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda| \, \|A\| < +\infty$$

и, следовательно, $\lambda A \in \mathscr{L}(X;Y)$. Таким образом, $\mathscr{L}(X; Y)$ действительно является линейным пространством.

Далее, очевидно, что из (58.24) непосредственно следует, что $\|A\| \geqslant 0$. При этом, если $\|A\| = 0$, т. е. $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = 0$, то для всех x таких, что $\|x\| \leqslant 1$, имеет место равенство $\|Ax\| = 0$, а следовательно, и $Ax = 0$. Но тогда и вообще для всех $x \in X$ также имеем $Ax = 0$. Действительно, если x такой элемент пространства X, что $\|x\| > 1$, то заведомо $x \neq 0$, а значит,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \, \|x\| = 1.$$

Поэтому, в силу уже доказанного, $A\left(\dfrac{x}{\|x\|} \right) = 0$. Отсюда $\dfrac{1}{\|x\|} \, Ax = 0$ и, следовательно, для любого $x \in X : Ax = 0$. Это означает, что $A = 0$. Итак, $\|A\|$ — действительно норма в пространстве $\mathscr{L}(X; Y)$.

Если значение $\|A\|$, определяемое формулой (58.24), бесконечно: $\|A\| = +\infty$, то будем говорить, что «норма оператора A бесконечна».

Норму $\|A\|$ (как конечную, так и бесконечную) можно получить и несколько другим способом. Именно, оказывается, что

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \ x \in X. \tag{58.25}$$

Для доказательства этой формулы заметим, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|A\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|. \tag{58.26}$$

В самом деле, с одной стороны, очевидно, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|,$$

так как при увеличении числового множества его верхняя грань может только увеличиваться. С другой стороны, для любого элемента $x \in X$ такого, что $0 < \|x\| \leqslant 1$, положим $y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{\|x\|}$; тогда

$$\|y\| = 1 \text{ и } \|Ay\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \geqslant \|Ax\|.$$

Отсюда

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|.$$

Из полученных неравенств и вытекает равенство (58.26).

Теперь имеем

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A\frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|Ay\| = \|A\|,$$

т. е. формула (58.25) также доказана. Из нее, очевидно, следует, что для любого $x \in X$, $x \neq 0$,

$$\|Ax\| \,/\, \|x\| \leqslant \|A\|,$$

и, следовательно, для любого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \, \|x\|, \tag{58.27}$$

где $\|x\|$ — норма в пространстве X, $\|Ax\|$ — норма в пространстве Y, а $\|A\|$ — норма в пространстве $\mathscr{L}(X; Y)$. Это неравенство, очевидно, является обобщением неравенства (41.42) в п. 41.6.

Существует еще один подход к понятию нормы оператора, связанный с понятием так называемых ограниченных операторов.

Определение 25. *Оператор $A : X \to Y$ называется ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|.$$

Если A — ограниченный оператор, то все постоянные $c > 0$, обладающие указанным свойством, ограничены снизу нулем, и поэтому их множество имеет конечную нижнюю грань. Обозначим ее через c_0:

$$c_0 = \inf \{c : \|Ax\| \leqslant c\|x\|, \quad x \in X\}. \tag{58.28}$$

Покажем, что для линейного ограниченного оператора A имеет место равенство

$$c_0 = \|A\|. \tag{58.29}$$

Действительно, перейдя при фиксированном $x \in X$ к нижней грани c_0 множества $\{c\}$ всех чисел c, для которых справедливо неравество

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|,$$

получим

$$\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|.$$

Поэтому при $x \neq 0$ имеем

$$\|Ax\| \ / \ \|x\| \leqslant c_0,$$

откуда

$$\|A\| \underset{(58.25)}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant c_0.$$

Обратное неравенство очевидно, так как из равенства (58.25) в силу определения верхней грани для любого элемента $x \in X$, $x \neq 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \|A\|,$$

т. е. $\|Ax\| \leqslant \|A\| \ \|x\|$. Согласно определению (58.28) отсюда и следует, что

$$c_0 \leqslant \|A\|.$$

Итак,

$$c_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Коротко говоря, это равенство означает, что линейный оператор A ограничен тогда и только тогда, когда он имеет конечную норму.

Таким образом, множество линейных ограниченных операторов составляет пространство $\mathscr{L}(X; Y)$.

В п. 41.6 было показано, что всякий линейный оператор

$$A : X \to Y$$

в случае, когда линейные нормированные пространства X и Y конечномерны и в качестве норм в них взяты квадратичные нормы $\|x\|_2$ и $\|y\|_2$, $x \in X$, $y \in Y$, имеет конечную норму. В конечномерных линейных пространствах все нормы эквивалентны (см. теорему 1 в п. 58.3), поэтому отсюда следует, что *любой линейный оператор A, отображающий конечномерное линейное пространство X в конечномерное же линейное пространство Y, ограничен при любом выборе норм в этих пространствах, т. е. в этом случае*

$$\mathfrak{L}(X; Y) = \mathscr{L}(X; Y).$$

УПРАЖНЕНИЕ 13. Доказать, что если X и Y — линейные нормированные пространства, причем Y — банахово пространство, то пространство линейных ограниченных операторов $\mathscr{L}(X; Y)$ также банахово.

Так как всякое линейное нормированное пространство является метрическим пространством, то можно говорить о непрерывности отображения одного линейного нормированного пространства в другое. Оказывается, что понятие ограниченности линейного оператора тесно связано с его непрерывностью.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. Для того чтобы линейный оператор $A : X \to Y$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен.*

Доказательство. Если A — ограниченный линейный оператор, то из неравенства

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \underset{(58.27)}{\leqslant} \|A\| \, \|x - x_0\|$$

сразу следует, что

$$\lim_{x \to x_0} Ax = Ax_0.$$

Если же A — непрерывный линейный оператор, то из непрерывности его в нуле следует, что, например, для $\varepsilon = 1$

существует такое $\delta > 0$, что из условия $\|x\| < \delta$ следует, что $\|Ax\| < 1$.

Зафиксируем какое-либо η, $0 < \eta < \delta$. Так как для любого $x \in X$, $x \neq 0$, выполняется неравенство

$$\left\|\frac{\eta x}{\|x\|}\right\| = \frac{\eta}{\|x\|}\|x\| = \eta < \delta,$$

то для любого $x \in X$, $x \neq 0$, согласно выбору числа δ, будем иметь

$$\left\|A\left(\frac{\eta x}{\|x\|}\right)\right\| < 1. \tag{58.30}$$

Но, в силу линейности оператора A, имеет место равенство

$$A\left(\frac{\eta x}{\|x\|}\right) = \frac{\eta}{\|x\|}A(x).$$

Следовательно, для любого $x \in X$, $x \neq 0$, справедливо неравенство

$$\frac{\eta}{\|x\|}\|Ax\| < 1,$$

т. е. неравенство

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \frac{1}{\eta},$$

что и означает ограниченность оператора A. □

Задача 3. Построить пример линейного разрывного оператора на некотором линейном нормированном пространстве.

Рассмотрим теперь композицию линейных операторов.

ТЕОРЕМА 4. *Если X, Y и Z — линейные нормированные пространства, а $A: X \to Y$ и $B: Y \to Z$ — линейные ограниченные операторы, то для нормы композиции $B \circ A$ операторов A и B выполняется неравенство*

$$\|B \circ A\| \leqslant \|B\|\,\|A\|. \tag{58.31}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Композиция ограниченных линейных операторов также является ограниченным линейным оператором.*

Доказательство. В самом деле, для любого $x \in X$ имеем

$$\|(B \circ A)(x)\| = \|B(Ax)\| \underset{(58.27)}{\leqslant} \|B\|\,\|Ax\| \underset{(58.27)}{\leqslant} \|B\|\,\|A\|\,\|x\|.$$

В силу свойства (58.28)—(58.29) нормы линейного оператора, отсюда сразу следует неравенство (58.31). □

Произведением $X \times Y$ линейных нормированных пространств X и Y называется линейное пространство $X \times Y$ (см. определение 11 в п. 58.1), в котором задана норма формулой

$$\|(x, y)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}, \tag{58.32}$$

где $\|x\|$ — норма элемента x в пространстве X, а $\|y\|$ — норма элемента y в пространстве Y.

Выполнимость аксиом нормы для $\|(x, y)\|$ легко устанавливается непосредственной проверкой.

УПРАЖНЕНИЯ. 14. Доказать, что если

$$\|(x, y)\|^* \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\|x\|, \|y\|\} \text{ и } \|(x, y)\|^{**} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\| + \|y\|,$$

где $(x, y) \in X \times Y$, X и Y — линейные нормированные пространства, то $\|(x, y)\|^*$ и $\|(x, y)\|^{**}$ являются нормами, эквивалентными норме (58.32).

15. Доказать, что произведение банаховых пространств также является банаховым пространством.

ТЕОРЕМА 5. *Если $A : X \times Y \to Z$ — линейный ограниченный оператор, отображающий произведение $X \times Y$ линейных нормированных пространств X и Y в линейное нормированное пространство Z, то существуют, и притом единственные, такие линейные ограниченные операторы $A_1 : X \to Z$ и $A_2 : Y \to Y$, что для любого элемента $(x, y) \in X \times Y$ имеет место равенство*

$$A(x, y) = A_1(x) + A_2(y). \tag{58.33}$$

При этом для норм операторов A, A_1 и A_2 выполняются неравенства

$$\|A_1\| \leqslant \|A\|, \quad \|A_2\| \leqslant \|A\|. \tag{58.34}$$

Обратно: *если $A_1 : X \to Z$ и $A_2 : Y \to Z$ — линейные ограниченные операторы, то оператор $A : X \times Y \to Z$, определенный формулой* (58.33), *является линейным ограниченным оператором и для него имеет место неравенство*

$$\|A\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|. \tag{58.35}$$

Доказательство. Если задан линейный ограниченный оператор $A : X \times Y \to Z$, то для любого $x \in X$ положим

$$A_1(x) = A(x, 0) \tag{58.36}$$

и для любого $y \in Y$ —

$$A_2(y) = A(0, y). \tag{58.37}$$

Как легко убедиться непосредственной проверкой, операторы A_1 и A_2 линейны. Докажем их ограниченность:

$$\|A_1(x)\| \underset{(58.36)}{=} \|A(x, 0)\| \underset{(58.27)}{\leqslant} \|A\| \, \|(x, 0)\| \underset{(58.32)}{=} \|A\| \, \|x\|. \qquad (58.38)$$

Аналогично

$$\|A_2(y)\| \leqslant \|A\| \, \|y\|. \qquad (58.39)$$

Из неравенств (58.38) и (58.39) сразу следует ограниченность операторов A_1 и A_2, а также неравенство (58.34).

Докажем формулу (58.33):

$$A(x, y) = A((x, 0) + (0, y)) = A(x, 0) + A(0, y) \underset{\substack{(58.36),\\(58.37)}}{=} A_1(x) + A_2(y).$$

Если $B_1 : X \to Z$ и : $B_2 : Y \to Z$ — два таких линейных ограниченных оператора, что

$$A(x, y) = B_1(x) + B_2(y), \qquad (58.40)$$

то, заметив, что $B_2(0) = 0$, будем иметь для любого $x \in X$ равенство

$$B_1(x) = B_1(x) + B_2(0) \underset{(58.40)}{=} A(x, 0) \underset{(58.36)}{=} A_1(x).$$

Аналогично для любого $y \in Y$ имеет место равенство

$$B_2(y) = A_2(y),$$

т. е. $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, иначе говоря, линейные операторы A_1 и A_2, для которых имеет место формула (58.33), единственны.

Наконец, если $A_1 : X \to Z$, $A_2 : Y \to Z$ — линейные ограниченные операторы и оператор $A : X \times Y \to Z$ определен формулой (58.33), то, очевидно, A — линейный оператор и, кроме того, ограниченный, ибо

$$\|A(x, y)\| \underset{(58.33)}{=} \|A_1(x) + A_2(y)\| \leqslant \|A_1(x)\| + \|A_2(y)\| \underset{(58.27)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \|A_1\| \, \|x\| + \|A_2\| \, \|y\|$$

и поэтому

$$\frac{\|A(x, y)\|}{\|(x, y)\|} \underset{(58.32)}{\leqslant} \|A_1\| \frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}} +$$
$$+ \|A_2\| \frac{\|y\|}{\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}} \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Отсюда сразу следует ограниченность оператора A и неравенство (58.35). □

Аналогично понятию произведения двух линейных нормированных пространств определяется понятие произведения n линейных нормированных пространств при любом натуральном n и для него доказывается теорема, аналогичная теореме 5.

58.7. Билинейные отображения нормированных пространств

Введем понятие ограниченного билинейного отображения (см. определение 12 в п. 58.1).

Определение 26. *Билинейное отображение* $f : X \times Y \to Z$ (X, Y *и* Z — *линейные нормированные пространства*) *называется ограниченным, если существует такая постоянная* $c > 0$, *что для любых* $x \in X$, $y \in Y$ *выполняется неравенство*

$$\|f(x, y)\| \leqslant c\,\|x\|\,\|y\|. \tag{58.41}$$

Нетрудно убедиться, что множество ограниченных билинейных отображений $f : X \times Y \to Z$ образует подпространство линейного пространства всех билинейных отображений $X \times Y \to Z$ (см. п. 58.1).

Если $f(x, y)$ — ограниченное билинейное отображение, то нижняя грань всех постоянных $c > 0$, для которых выполняется неравенство (58.41), называют *нормой билинейного отображения* и обозначают $\|f\|$:

$$\|f\| = \inf\{c : \|f(x, y)\| \leqslant c\,\|x\|\,\|y\|\}. \tag{58.42}$$

Справедливость аксиом нормы для $\|f\|$ на линейном пространстве всех ограниченных билинейных отображений $f : X \times Y \to Z$ легко устанавливается непосредственной проверкой.

Из неравенства (58.41) и определения (58.42) следует, что для всякого ограниченного билинейного отображения f выполняется неравенство

$$\|f(x, y)\| \leqslant \|f\|\,\|x\|\,\|y\|. \tag{58.43}$$

Линейное нормированное пространство $\mathscr{L}(X \times Y; Z)$ ограниченных билинейных отображений $f : X \times Y \to Z$ обозначается также через $\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$.

В частности, при $X = Y$ для пространства $\mathscr{L}_2(X \times X; Z) = \mathscr{L}(X^2; Z)$ употребляется и обозначение $\mathscr{L}_2(X, X; Z)$.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы билинейное отображение* $z = f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, *произведения* $X \times Y$ *линейных нормированных пространств* X *и* Y *в линейное нормированное пространство* Z *было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Доказательство. Если билинейное отображение

$$f : X \times Y \to Z$$

ограничено, то для любых $x_0 \in X$, $x \in Y$, $y_0 \in Y$, $y \in Y$, имеем

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| = \|f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f(x - x_0, y)\| + \|f(x_0, y - y_0)\| \underset{(58.41)}{\leqslant}$$
$$\leqslant c(\|x - x_0\| \, \|y\| + \|x_0\| \, \|y - y_0\|) \underset{\pm y_0}{\leqslant}$$
$$\leqslant c[\|x - x_0\| \, (\|y_0\| + \|y - y_0\|) + \|x_0\| \, \|y - y_0\|].$$

Очевидно, что из этого неравенства сразу следует непрерывность отображения f в точке (x_0, y_0):

$$\lim_{\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \to 0} f(x, y) = f(x_0, y_0). \qquad (58.44)$$

Если, наоборот, билинейное отображение f: $X \times Y \to Z$ непрерывно на $X \times Y$, то, в частности, оно непрерывно в нуле и, следовательно, например, для $\varepsilon = 1$, существует такое $\delta > 0$, что как только $\|x\| < \delta$, $\|y\| < \delta$, то выполняется неравенство

$$\|f(x, y)\| < 1. \qquad (58.45)$$

Зафиксируем какое-либо η, $0 < \eta < \delta$. Тогда для любых $x \in X$ и $y \in Y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, будут выполняться неравенства

$$\left\|\frac{\eta x}{\|x\|}\right\| = \frac{\eta}{\|x\|} \, \|x\| = \eta < \delta, \quad \left\|\frac{\eta y}{\|y\|}\right\| < \delta,$$

поэтому

$$\left\|f\left(\frac{\eta x}{\|x\|}, \frac{\eta y}{\|y\|}\right)\right\| \underset{(58.45)}{<} 1.$$

Отсюда, использовав билинейность отображения f, получим

$$\|f(x, y)\| < \frac{1}{\eta^2} \, \|x\| \, \|y\|, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

При $x = 0$ или $y = 0$ это неравенство также справедливо, так как $f(0, x) = f(x, 0) = 0$. Таким образом, отображение f действительно ограничено. □

УПРАЖНЕНИЕ 16. Доказать, что если Z — банахово пространство, то пространство билинейных ограниченных отображений $\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ также банахово (X и Y — линейные нормированные пространства).

Пусть $f: X \times Y \to Z$ — билинейное отображение произведения линейных нормированных пространств X и Y в линейное нормированное пространство Z. При фиксированном элементе $x \in X$ отображение f задает некоторое линейное отображение (обозначим его f_x) пространства Y в пространство Z:

$$f_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y), \quad y \in Y. \qquad (58.46)$$

При этом если f — ограниченное билинейное отображение, то

$$\|f_x(y)\| \underset{(58.46)}{=} \| f(x, y)\| \underset{(58.43)}{\leqslant} \|f\| \, \|x\| \, \|y\|; \qquad (58.47)$$

поэтому f_x также является ограниченным отображением и, согласно определению нормы линейного оператора,

$$\|f_x\| \leqslant \|f\| \, \|x\|.$$

Таким образом, для каждого билинейного отображения $f \in \mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ отображение

$$F : x \mapsto f_x \qquad (58.48)$$

отображает пространство X в пространство $\mathscr{L}(Y; Z)$.

Из формул (58.46) и (58.48) следует, что

$$(F(x))\,(y) \underset{(58.48)}{=} f_x(y) \underset{(58.46)}{=} f(x, y). \qquad (58.49)$$

ЛЕММА 8. *Отображение* F (см. (58.48)) *является линейным ограниченным оператором, отображающим пространство* X *в пространство* $\mathscr{L}(Y; Z)$, *т. е.* $F \in \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(Y; Z))$, *и*

$$\|F\| = \|f\|. \qquad (58.50)$$

Доказательство. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, λ_1 и λ_2 — числа, тогда для любого $y \in Y$ имеем

$$(F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))\,(y) \underset{(58.49)}{=} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) =$$
$$= \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y) \underset{(58.49)}{=} (\lambda_1 F(x_1))\,(y) + (\lambda_2 F(x_2))\,(y) =$$
$$= (\lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2))\,(y),$$

и так как это верно для каждого $y \in Y$, то

$$F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2),$$

т. е. F — линейный оператор.

Ограниченность оператора F следует из неравенства

$$\|F(x)\| \underset{(58.48)}{=} \|f_x\| \underset{(58.47)}{\leqslant} \|f\| \, \|x\|.$$

Более того, из этого неравенства вытекает, что

$$\|F\| \leqslant \|f\|. \qquad (58.51)$$

С другой стороны, ограниченность оператора F означает, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|F(x)\| \leqslant \|F\| \, \|x\|, \qquad (58.52)$$

поэтому

$$\|f(x, y)\| \underset{(58.49)}{=} \|(F(x))(y)\| \leqslant \|F(x)\| \, \|y\| \underset{(58.52)}{\leqslant} \|F\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

Отсюда, в силу определения (58.42), имеем

$$\|f\| \leqslant \|F\|. \qquad (58.53)$$

Из неравенств (58.51) и (58.53) следует равенство (58.50). □

Определение 27. *Отображение одного линейного нормированного пространства на другое называется изоморфизмом или изоморфным отображением, если оно взаимно-однозначно, линейно и сохраняет норму.*

Два линейных нормированных пространства, для которых существует изоморфное отображение одного на другое, называются *изоморфными*.

Пример. Пространство $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}, X)$ для любого линейного нормированного пространства X изоморфно с X.

Поставим в соответствие каждому элементу $x \in X$ оператор $A_x : t \mapsto tx$, $t \in \boldsymbol{R}$. Очевидно, что оператор $A_x : \boldsymbol{R} \to X$ линеен и ограничен: $\|A\| = \|x\|$. Легко убедиться, что соответствие $x \mapsto A_x$ является изоморфизмом между X и $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}; X)$.

ТЕОРЕМА 7. *Если X, Y и Z — линейные нормированные пространства, то пространства $\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ и $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(Y, Z))$ являются изоморфными пространствами, причем изоморфным отображением пространства $\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ на пространство $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(Y, Z))$ является отображение*

$$f \mapsto F \qquad (58.54)$$

(см. (58.46) и (58.48)).

Доказательство. Обозначим отображение (58.54) через Φ:

$$\Phi(f) = F. \qquad (58.55)$$

Согласно определению, отображение $\Phi(f)$ является таким отображением пространства X в пространство $\mathscr{L}(Y; Z)$, что для любого $x \in X$ элемент $(\Phi(f))(x)$ является отображением Y в Z и для него выполняется равенство

$$(\Phi(f))(x) \underset{(58.55)}{=} F(x) \underset{(58.48)}{=} f_x. \qquad (58.56)$$

Поэтому для любого $y \in Y$ выполняется соотношение

$$((\Phi(f))(x))(y) \underset{(58.56)}{=} f_x(y) \underset{(58.46)}{=} f(x, y). \qquad (58.57)$$

Докажем линейность отображения Φ: пусть $f, g \in \mathscr{L}_2(X, Y; Z)$, λ_1, λ_2 — числа, тогда

$$((\Phi(\lambda f + \mu g))(x))(y) \underset{(58.57)}{=} (\lambda f + \mu g)(x, y) =$$

$$= \lambda f(x, y) + \mu g(x, y) \underset{(58.57)}{=} \lambda((\Phi(f))(x))(y) + \mu((\Phi(g))(x))(y) =$$

$$= ((\lambda\Phi(f))(x) + (\mu\Phi(g))(x))(y)$$

(мы здесь использовали обычное правило сложения функций и умножения их на число). Так как это равенство верно для любых $y \in Y$, то

$$(\Phi(\lambda f + \mu g))(x) = (\lambda\Phi(f))(x) + (\mu\Phi(g))(x) = (\lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g))(x),$$

и так как это верно для любых $x \in X$, то

$$\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g),$$

что и означает линейность оператора Φ.

Если $F = \Phi(f)$, то $\|f\| = \|F\|$ (см. (58.50)), т. е. оператор Φ действительно сохраняет норму. Поэтому если $f \neq 0$, а следовательно, и $\|f\| \neq 0$, то $\|\Phi(f)\| \neq 0$, откуда $\Phi(f) \neq 0$, т. е. ядро отображения Φ состоит только из нуля, что означает взаимную однозначность (инъективность) отображения Φ.

Наконец покажем, что отображение Φ отображает пространство $\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ на все пространство $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(Y, Z))$ (сюръективность отображения Φ).

Пусть F — линейный ограниченный оператор, отображающий пространство X в $\mathscr{L}(Y; Z)$, тем самым для каждого $x \in X$ элемент $F(x)$ является ограниченным линейным оператором, отображающим пространство Y в Z. Это означает, что для каждого $y \in Y$ элемент $(F(x))(y)$ принадлежит пространству Z.

Положим

$$f(x, y) \overset{\text{def}}{=} (F(x))(y). \tag{58.58}$$

Из линейности операторов F и $F(x)$ следует, что $f(x, y)$ является билинейным отображением $X \times Y$ в Z, а из неравенства

$$\|f(x, y)\| \underset{(58.58)}{=} \|(F(x))(y)\| \underset{(58.27)}{\leqslant} \|F(x)\| \, \|y\| \underset{(58.27)}{\leqslant} \|F\| \, \|x\| \, \|y\|$$

— его ограниченность, т. е. $f \in \mathscr{L}_2(X, Y; Z)$. При этом

$$((\Phi(f))(x))(y) \underset{(58.57)}{=} f(x, y) \underset{(58.58)}{=} (F(x))(y),$$

и так как это неравенство верно для любых $x \in X$, $y \in Y$, то

$$\Phi(f) = F. \ \square$$

По аналогии с ограниченными билинейными отображениями вводится понятие ограниченных мультилинейных отображений (см. п. 58.1) произведения линейных нормированных пространств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в линейное нормированное пространство Y и определяются их нормы. Линейное нормированное пространство мультилинейных ограниченных отображений $f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ обозначается $\mathscr{L}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y)$.

Имеет место теорема, аналогичная теореме 8. Например, при $n = 3$ доказывается, что пространство $\mathscr{L}_3(X_1, X_2, X_3; Y)$ изоморфно пространству $\mathscr{L}(X_1; \mathscr{L}(X_2, X_3; Y)$, которое, в силу теоремы 7, изоморфно пространству $\mathscr{L}(X_1; \mathscr{L}(X_2; \mathscr{L}(X_3; Y)))$.

В случае произвольного n пространства $\mathscr{L}(X_1; \mathscr{L}(X_2; \mathscr{L}(X_3; \ldots, \mathscr{L}(X_n; Y) \ldots)))$ и $\mathscr{L}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y)$ изоморфны между собой, при этом существует такой изоморфизм этих пространств, что для $F \in \mathscr{L}(X_1; \mathscr{L}(X_2; \ldots, \mathscr{L}(X_n, Y)))$ и $f \in \mathscr{L}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y)$, соответствующих при нем друг другу, для любых $x_k \in X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеет место соотношение

$$(\ldots((Fx_1)x_2)\ldots)x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{58.59}$$

В заключение отметим, что когда $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, то вместо $\mathscr{L}_n(X, X, \ldots, X; Y)$ пишут $\mathscr{L}_n(X^n; Y)$.

58.8. Дифференцируемые отображения линейных нормированных пространств

Определению понятия дифференцируемости отображения множества, лежащего в одном линейном нормированном пространстве, в другое такое пространство предпошлем, как всегда, несколько замечаний о символе «o малое» для рассматриваемого случая.

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. $E \subset X$ и $x_0 \in X$.

Отображение $\alpha : E \to Y$ назовем бесконечно малым при $x \to x_0$ по сравнению с функцией $\|x - x_0\|^n$ и будем писать

$$\alpha(x) = o((x - x_0)^n),$$

если существует такое отображение $\varepsilon : E \to Y$, что для всех точек из множества E, принадлежащих некоторой фиксированной окрестности точки x_0, имеет место равенство

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)\|x - x_0\|^n \tag{58.60}$$

и

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0. \tag{58.61}$$

Если отображение $\alpha(x)$ определено в точке x_0, т. е. $x_0 \in E$, то и отображение $\varepsilon(x)$ также определено в этой точке, а следовательно, согласно определению предела, и непрерывно в ней: $\varepsilon(x_0) = 0$.

Определение 28. *Отображение f открытого множества G линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y называется дифференцируемым в точке $x \in G$, если существует такой линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$, что имеет место равенство*

$$f(x + h) = f(x) + A(h) + o(h), \quad h \in X, \quad h \to 0. \tag{58.62}$$

Линейный оператор A называется *дифференциалом* отображения f в точке x и обозначается $Df(x)$ (или, более подробно, $(Df)(x)$). Дифференциал $Df(x)$ называется также *дифференциалом Фреше**.

Используя обозначение дифференциала, определение (58.62) можно записать в виде.

$$f(x + h) = f(x) + Df(x)h + o(h), \quad h \to 0 \tag{58.63}$$

(здесь для краткости написано $Df(x)h$ вместо $(Df(x))(h)$).

Дифференциал Фреше $Df(x)$ называют также производной Фреше и обозначают $f'(x)$. В конечномерном случае (см. п. 41.7), по аналогии со случаем числовых функций, мы называли производной отображения матрицу дифференциала (матрицу Якоби) в некотором заданном базисе. В бесконечномерном случае нет прямого аналога этого определения хотя бы потому, что не во всяком линейном нормированном пространстве имеется базис. В том случае, когда в рассматриваемых пространствах существуют базисы, линейные операторы, в частности дифференциалы, можно задавать их бесконечными матрицами, но мы на этом не будем здесь останавливаться.

Отметим, что если отображение $F : G \to Y$, $G \subset X$, дифференцируемо в точке $x \in G$, то оно и непрерывно в этой точке. Это сразу следует из формулы (58.63):

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x).$$

Пример 1. Если X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$, $a \in X$ и $f(t) = x_0 + ta$, $-\infty < t < +\infty$, то отображение $f : \boldsymbol{R} \to X$ дифференцируемо во всех точках и

$$f'(x_0 + ta) = a. \tag{58.64}$$

Действительно, здесь $f(t + h) = f(t) + ah$, т. е. условие (58.63) выполняется при $o(h) \equiv 0$ (напомним, что каждый эле-

* М. Фреше (1878—1973) — французский математик.

мент $a \in X$ можно рассматривать и как элемент пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}; X)$, см. пример в п. 58.8).

Формулируемые ниже теоремы 8—10 доказываются дословно так же, как аналогичные теоремы 3—5 в п. 41.6 для отображений множеств, лежащих в конечномерных пространствах, так как в приведенных там доказательствах нигде не использовалась конечномерность рассматриваемых пространств (длины $|x|$ векторов евклидовых пространств надо заменить, конечно, нормами $\|x\|$ элементов линейных нормированных пространств). Поэтому здесь мы не будем приводить доказательства указанных теорем.

ТЕОРЕМА 8. *Если отображение $f : G \to Y$ (G — открытое множество, $G \subset X$, X и Y — линейные нормированные пространства) дифференцируемо в точке $x \in G$, то его дифференциал в этой точке определен однозначно.*

СЛЕДСТВИЕ. *Дифференциал линейного отображения совпадает с самим отображением.*

ТЕОРЕМА 9 (линейность дифференциала). *Если отображения $f : G \to Y$ и $g : G \to Y$ (G — открытое множество в X, X и Y — линейные нормированные пространства) дифференцируемы в точке $x \in G$, то для любых чисел λ и μ линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ также дифференцируема в этой точке и*

$$D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x).$$

ТЕОРЕМА 10. *Пусть G и D — открытые множества соответственно в X и Y, а X, Y и Z — линейные нормированные пространства. Если отображение $f : G \to D$ дифференцируемо в точке $x \in G$, а отображение $g : D \to Z$ в точке $f(x)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и ее дифференциал в этой точке равен композиции дифференциалов отображений f и g:*

$$D(g \circ f)(x) = D(g(f(x))) \circ Df(x). \tag{58.65}$$

Если X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$, $x \in X$, то множество всех точек из X вида

$$x_0(1 - t) + tx, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

называется *отрезком* $[x_0, x]$, а множество всех точек вида

$$x_0(1 - t) + tx, \quad 0 < t < 1,$$

— *интервалом* (x_0, x) в пространстве X. Точки x_0 и x называются концами указанных отрезка и интервала.

Пример 2. *Если отображение* $f: G \to Y$ (*G — открытое в X множество*) *дифференцируемо в точке* $x + t_0 h$, $0 < t_0 < 1$, *интервала* $(x, x + h) \subset G$, *то отображение* $g(t) = f(x + th)$, $0 < t < 1$, *дифференцируемо в точке* $t_0 \in (0, 1)$ *и*

$$g'(t_0) = f'(x + t_0 h)h.$$

Это сразу следует из формул (58.64) и (58.65).

Наряду с понятием дифференцируемости отображения в смысле определения 28 бывает полезным понятие дифференцируемости отображения в данном направлении, к рассмотрению которого мы и перейдем.

Определение 29. *Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, $x \in X$, $h \in X$, x и h фиксированы, $h \neq 0$, и отображение f определено на элементах вида $x + th$ при достаточно малых $t > 0$, $f(x + th) \in Y$.*

Отображение f называется дифференцируемым в точке x по направлению вектора h, если существует такой элемент $(D_h f)(x) \in Y$, что

$$f(x + th) = f(x) + (D_h f)(x)t + o(t), \quad t \to 0. \qquad (58.66)$$

Это условие равносильно условию существования в пространстве Y предела

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = (D_h f)(x).$$

Элемент $D_h f(x) \equiv (D_h f)(x)$ называется *производной по направлению h* (или *производной Гато** *по направлению h*).

Производная Фреше $Df(x)$ и производная Гато $D_h f(x)$ имеют разную природу: производная Фреше — элемент пространства $\mathscr{L}(X; Y)$, а производная Гато — элемент пространства Y.

УПРАЖНЕНИЯ. 17. Доказать, что отображение $x \to \|x\|$, $x \in X$ (X — линейное нормированное пространство), имеет в точке $x = 0$ производную по любому направлению и не дифференцируемо по Фреше.

18. Доказать, что если отображение $f: G \to Y$ ($G \subset X$, X и Y — линейные нормированные пространства, G — открытое в X множество) дифференцируемо в точке $x \in G$ по Фреше, то оно в этой точке имеет производную по любому направлению.

Если у отображения $f: G \to Y$, $G \subset X$, в точке $x \in G$ существует производная по любому направлению, т. е. при любом $h \neq 0$ существует $D_h f(x) \in Y$, то, вообще говоря, этот элемент нели-

---

* Р. Гато (ум. 1914) — французский математик.

нейно зависит от h. Если же существует такой линейный ограниченный оператор, обозначаемый обычно $D_{\text{сл}}f(x) : X \to Y$, что

$$(D_{\text{сл}}f(x))(h) = D_h f(x),$$

то этот оператор называется *слабым дифференциалом*, *слабой производной* или *дифференциалом Гато*.

Если отображение имеет в некоторой точке слабый дифференциал, то оно называется слабо дифференцируемой в ней. В этом случае равенство (58.66) имеет вид

$$f(x + th) = f(x) + tD_{\text{сл}}f(x))(h) + o(t), \quad t \to 0$$

(вместо $(D_{\text{сл}}f(x))(h)$ пишут короче: $D_{\text{сл}}f(x)(h)$) и оно уже имеет смысл для всех $h \in X$.

Дифференциал Фреше называют также *сильным дифференциалом*.

Очевидно, что если у отображения $f : G \to Y$, $G \subset X$, в точке x существует сильный дифференциал, то в ней существует и слабый дифференциал, причем они совпадают. В самом деле, если имеет место равенство (58.63), то при любом фиксированном $h \neq 0$ и достаточно малом $t > 0$ будем иметь

$$f(x + th) = f(x) + Df(x)(th) + o(th) = f(x) + tDf(x)(h) + o(t), \quad t \to 0,$$

так как

$$o(th) = o(\|th\|) = o(t\|h\|) = o(t), \quad t \to 0$$

(h — фиксированный элемент пространства X, не равный нулю).

Это и означает, что сильный дифференциал является и слабым.

УПРАЖНЕНИЕ 19. Привести пример отображения, имеющего в некоторой точке слабый дифференциал и не имеющего в ней сильного.

Указание: см. п. 37.7.

В случае, когда $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y = \boldsymbol{R}$, $h \in \boldsymbol{R}^n$, $h \neq 0$, $h_0 = \frac{h}{|h|} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, производная Гато $(D_h f)(x)$ слабо дифференцируемой в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ функцией $f : X \to \boldsymbol{R}$ n переменных связана с ее производной $\frac{\partial f(x)}{\partial h}$ по направлению h (в смысле п. 37.7, т. 2) следующим соотношением:

$$(D_h f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \frac{d}{dt} f(x + t|h|h_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = |h| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \cos\alpha_k =$$

$$= |h|(\nabla f, h_0) = |h| \frac{\partial f(x)}{\partial h}.$$

Можно показать (см.: Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1986), что если у отображения $f : G \to Y$, $G \subset X$, в некоторой окрестности точки $x \in G$ существует слабая производная $D_{\text{сл}}f(x)$, непрерывная в точке x (это означает, что отображение $x \mapsto (D_{\text{сл}}f)(x) \in \mathscr{L}(X; Y)$, т. е. отображение вида $X \to \mathscr{L}(X; Y)$, непрерывно), то в этой точке существует сильная производная $Df(x)$, причем она совпадает со слабой. Доказательство этого утверждения здесь не приводится, так как его проведение требует знания дополнительных фактов из функционального анализа (теорема Хана-Банаха), а в случае несепарабельных пространств и сведений из теории множеств о вполне упорядоченных множествах.

58.9. Формула конечных приращений

Получим теперь для дифференцируемых отображений линейных нормированных пространств аналог формулы конечных приращений Лагранжа для числовых функций (см. пп. 11.2 и 15.2). Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 9 (лемма Л. Шварца*). *Пусть* φ *— отображение отрезка* $[0, 1]$ *в линейное нормированное пространство* Y, *а* ψ *— действительная функция, заданная также на отрезке* $[0, 1]$, *причем* φ *и* ψ *непрерывны на этом отрезке и дифференцируемы в его внутренних точках.*

Если для всех $t \in (0, 1)$ *выполняется неравенство*

$$\|\varphi'(t)\| \leqslant \psi'(t), \tag{58.67}$$

то имеет место неравенство

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leqslant \psi(1) - \psi(0). \tag{58.68}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и обозначим через E_ε множество точек отрезка $[0, 1]$, для которых выполняется неравенство

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant \psi(t) - \psi(0) + \varepsilon t + \varepsilon. \tag{58.69}$$

В силу непрерывности φ и ψ, множество E_ε, как определенное нестрогим неравенством, замкнуто: в самом деле, если $t_n \in E_\varepsilon$ и $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t_0$, то, перейдя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве

$$\|\varphi(t_n) - \varphi(0)\| \leqslant \psi(t_n) - \psi(0) + \varepsilon t_n + \varepsilon,$$

* Л. Шварц (род. в 1915 г.) — французский математик.

в силу непрерывности φ, ψ и нормы, получим

$$\|\varphi(t_0) - \varphi(0)\| \leqslant \psi(t_0) - \psi(0) + \varepsilon t_0 + \varepsilon.$$

Эго означает, что $t_0 \in E_\varepsilon$, т. е. что множество E_ε замкнуто.

Множество E_ε не пусто, так как неравенство (58.69) заведомо справедливо для достаточно малых t, так как предел его левой части при $t \to 0$ равен нулю, а правой равен ε.

Положим

$$a = \sup E_\varepsilon. \tag{58.70}$$

Из замкнутости множества E_ε следует, что $a \in E_\varepsilon$. Покажем, что $a = 1$. В самом деле, пусть

$$a < 1. \tag{58.71}$$

В силу дифференцируемости отображения φ и непрерывности нормы, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $h > 0$ имеем

$$\|\varphi(a + h) - \varphi(a)\| = \|\varphi'(a)h + o(h)\| \leqslant \|\varphi'(a)\|\, h + \frac{\varepsilon}{2} h. \tag{58.72}$$

Из неравенства (58.67) следует, что $\psi'(t) \geqslant 0$ и, следовательно, функция ψ не убывает, поэтому

$$|\psi(a + h) - \psi(a)| = \psi(a + h) - \psi(a),\ \ h > 0. \tag{58.73}$$

В силу же дифференцируемости функции ψ, для достаточно малых $h > 0$ получим

$$|\psi(a + h) - \psi(a)| = |\psi'(a)h + o(h)| \geqslant |\psi'(a)|\, h - |o(h)| \geqslant$$

$$\geqslant \psi'(a)h - \frac{\varepsilon}{2} h. \tag{58.74}$$

Поэтому

$$\|\varphi(a + h) - \varphi(a)\| \underset{(58.72)}{\leqslant} \|\varphi'(a)\|h + \frac{\varepsilon}{2} h \underset{(58.67)}{\leqslant} \psi'(a)h + \frac{\varepsilon}{2} h \underset{\substack{(58.73),\\(58.74)}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \psi(a + h) - \psi(a) + \varepsilon h. \tag{58.75}$$

Заметив, что из условия $a \in E_\varepsilon$ следует

$$\|\varphi(a) - \varphi(0)\| \underset{(58.69)}{\leqslant} \psi(a) - \psi(0) + \varepsilon a + \varepsilon, \tag{58.76}$$

для всех достаточно малых $h > 0$ будем иметь

$$\|\varphi(a + h) - \varphi(0)\| = \|\varphi(a + h) - \varphi(a) + \varphi(a) - \varphi(0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi(a + h) - \varphi(a)\| + \|\varphi(a) - \varphi(0)\| \underset{\substack{(58.75),\\(58.76)}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \psi(a + h) - \psi(0) + \varepsilon(a + h) + \varepsilon.$$

Таким образом, для числа $a + h$ при указанных h выполняется неравенство (58.69), что противоречит (58.70), так как $h > 0$.

Итак, $a = \sup E_\varepsilon = 1$. Это означает, что неравенство (58.69) справедливо при $t = 1$ и любом $\varepsilon > 0$:

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leqslant \psi(1) - \psi(0) + 2\varepsilon.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим неравенство (58.68). □

ТЕОРЕМА 11. *Если отображение $f : G \to Y$ (G — открытое в X множество, X и Y — линейные нормированные пространства) непрерывно на отрезке $[x_0, x] \subset G$ и дифференцируемо на интервале (x_0, x), $x_0 + h \in [x_0, x]$, то*

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leqslant \|h\| \sup_{\xi \in (x_0, x)} \| f'(\xi)\|. \qquad (58.77)$$

Доказательство. Если $\sup\limits_{\xi \in (x_0, x)} \|f'(\xi)\| = +\infty$, то неравенство (58.77) очевидно, если же производная f' ограничена:

$$c \overset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f'(\xi)\| < +\infty,$$

то рассмотрим функции $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ и $\psi(t) = c\|h\|t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируемы на интервале $(0, 1)$ (для отображения $f(x_0 + th)$ это следует из того, что оно является композицией отображений $x = x + th$ и f). Так как (см. пример 2 в. п. 58.8)

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + th)h,$$

то

$$\|\varphi'(t)\| \leqslant \|f'\| \, \|h\| \leqslant c \, \|h\| = \psi'(t), \quad 0 < t < 1,$$

и, следовательно, φ и ψ удовлетворяют условию леммы 10, а неравенство (58.68) превращается в рассматриваемом случае в неравенство (58.77). □

58.10. Производные высших порядков

Пусть f — отображение открытого множества G линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y. Если это отображение дифференцируемо во всех точках $x \in G$, то его производная $f'(x) \in \mathscr{L}(X; Y)$ задает отображение $f' : x \mapsto f'(x)$ множества G в линейное нормированное пространство $\mathscr{L}(X; Y)$. Если это отображение, в свою

очередь, дифференцируемо в точке $x \in G$, то его производная $(f')'(x)$ обозначается $f''(x)$, т. е.

$$f''(x) \overset{\text{def}}{=} (f')'(x), \tag{58.78}$$

и является элементом пространства $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X, Y))$.

Оператор $f''(x)$ называется второй производной отображения f в точке x. Если отображение f имеет в точке x вторую производную, то оно называется дважды дифференцируемым в этой точке.

Пусть $h \in X$, $k \in X$, тогда $f''(x)h \in \mathscr{L}(X; Y)$ и $(f''(x)h)k \in Y$. Отображение

$$(h, k) \mapsto (f''(x)h)k$$

является, как легко видеть, билинейной формой, т. е. элементом пространства $\mathscr{L}_2(X^2; Y)$ (см. п. 58.7).

Таким образом, вторую производную можно рассматривать как билинейную форму, определяемую равенством

$$f''(x)(h, k) = (f''(x)h)k, \quad h \in X, \quad k \in X. \tag{58.79}$$

Задача 4. Билинейная форма $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$ (X — линейное нормированное пространство), называется *симметричной*, если для любых элементов $x \in X$ и $y \in X$ выполняется равенство $f(x, y) = f(y, x)$.

Доказать, что если отображение f открытого множества $G \subset X$ в пространство Y дважды дифференцируемо в точке $x \in G$, то вторая производная $f''(x)$ является билинейной ограниченной симметричной формой из $\mathscr{L}(X^2, Y)$ (X и Y — линейные нормированные пространства).

Аналогичным образом определяются последовательно и производные высших порядков рассматриваемого отображения $f : G \to Y$, $G \subset X$:

$$f'''(x) = (f'')'(x)$$

и, вообще,

$$f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} (f^{(n-1)})'(x), \quad n = 1, 2, \dots \tag{58.80}$$

(как обычно $f^{(0)}(x) = f(x)$). При фиксированном $x \in G$ производная $f'''(x)$ является отображением X в $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; Y))$, т. е. $f'''(x) \in \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; Y)))$. Подобным образом

$$f^{(n)}(x) \in \mathscr{L}(\underbrace{X; \mathscr{L}(X; \dots, \mathscr{L}(X}_{X\ n\ \text{раз}}; Y)\dots)). \tag{58.81}$$

Так как пространство $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; \dots, \mathscr{L}(X; Y)\dots))$ изоморфно пространству n-линейных форм $\mathscr{L}_n(X^n; Y)$, то производную $f^{(n)}(x)$ можно рассматривать как полилинейную форму

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) \overset{\text{def}}{=} (\dots(f^{(n)}(x)(h_1)\dots)h_n, \tag{58.82}$$
$$h_k \in X, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) = ((f^{(n-1)})'(x)h_1)(h_2, \dots, h_n). \qquad (58.83)$$

В самом деле, согласно (58.81),

$$f^{(n)}(x) \in \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(\underbrace{X; \mathscr{L}(X; \dots, \mathscr{L}(X}_{n-1 \text{ раз}}; Y)\dots)), \; h_1 \in X,$$

но пространство $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; \dots, \mathscr{L}(X; Y)\dots))$ изоморфно пространству полилинейных функций $\mathscr{L}(X^{n-1}; Y)$, причем при описанном выше их изоморфизме оператору $f^{(n)}(x)h_1$ соответствует $(n-1)$-линейная форма, определяемая равенством (см. 58.59))

$$(f^{(n)}(x)h_1)(h_2, \dots, h_n) = (\dots(f^{(n)}(x)h_1)h_2 \dots)h_n. \qquad (58.84)$$

Таким образом,

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) \underset{\substack{(58.82),\\ (58.84)}}{=} (f^{(n)}(x)h_1)(h_2, \dots, h_n).$$

Отсюда, в силу формулы (58.80), сразу следует равенство (58.83).

По индукции доказывается формула

$$((f^{(m)})^{(n-m)}(x)(h_1, \dots, h_{n-m}))(h_{n-m+1}, \dots, h_n) =$$
$$= f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n), \quad 0 \leqslant m \leqslant n. \qquad (58.85)$$

В том случае, когда $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$, вместо $f^{(n)}(x)(h, \dots, h)$ будем писать $f^{(n)}(x)h^n$. Таким образом,

$$f^{(n)}(x)h^n = (\dots(f^n(x)h \dots)h. \qquad (58.86)$$

58.11. Формула Тейлора

Докажем теперь справедливость формулы Тейлора для отображений линейных нормированных пространств.

ТЕОРЕМА 12. *Если отображение $f: G \to Y$ (G — открытое в X множество, X и Y — линейные нормированные пространства) имеет на отрезке $[x_0, x_1] \subset G$ n непрерывных производных и на интервале (x_0, x_1) производную порядка $n+1$, то*

$$\left\| f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\xi \in (x_0, x_1)} \|f^{(n+1)}(\xi)\|. \qquad (58.87)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если в предположениях теоремы производная порядка $n+1$ ограничена на интервале* (x_0, x_1)

$$c = \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f^{n+1}(\xi)\| < +\infty, \qquad (58.88)$$

то

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n),$$
$$h \to 0. \qquad (58.89)$$

Доказательство. При $n = 0$ неравенство (58.87) уже доказано: оно превращается в формулу конечных приращений (см. п. 58.9). В общем случае его доказательство проведем по индукции. Пусть теорема справедлива для всех k, $0 \leqslant k < n$. Заметим, что

$$f^{(k)}(x)h^k \underset{(58.85)}{=} ((f')^{(k-1)}(x)h^{k-1})h, \; x \in (x_0, x_1), \; k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (58.90)$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + th) - f(x_0) - f'(x_0)(th) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(th)^n,$$

отображающую отрезок $[0, 1]$ в пространство Y. Очевидно, что

$$g(1) - g(0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \qquad (58.91)$$

и что $g(t)$ имеет на отрезке $[0, 1]$ производную, для которой справедлива формула

$$g'(t) \underset{\substack{(58.64),\\(58.65)}}{=} f'(x_0 + th)h - f'(x_0)h - \ldots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0)h^n \underset{(58.90)}{=}$$

$$= \left[f'(x_0 + th) - f'(x_0) - \ldots - \frac{1}{(n-1)!}(f')^{(n-1)}(x_0)(th)^{n-1}\right]h, \qquad (58.92)$$

где выражение в квадратных скобках является элементом пространства $\mathscr{L}(X, Y)$. Оценим норму этого элемента, применив к отображению $f' : X \to \mathscr{L}(X, Y)$ неравенство (58.87) (это возможно в силу индуктивного предположения: производная f' имеет n производных):

$$\left\|f'(x_0 + th) - f'(x_0) - \ldots - \frac{1}{(n-1)!}(f')^{(n-1)}(th)^{n-1}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|th\|^n}{n!} \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|(f')^{(n)}(\xi)\| \underset{\substack{(58.80),\\(58.86),\\(58.88)}}{=} \frac{ct^n\|h\|^n}{n!}, \qquad (58.93)$$

где $c = \sup\limits_{\xi \in (x_0,\, x)} \|f^{(n+1)}(\xi)\| \leqslant +\infty$. Следовательно,

$$\|g'(t)\| \underset{\substack{(58.92),\\(58.93)}}{\leqslant} \frac{ct^n\|h\|^{n+1}}{n!}.$$

Применив лемму 9 к функциям $\varphi(t) = g(t)$ и $\psi(t) = \dfrac{ct^{n+1}\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$, получим

$$\|g(1) - g(0)\| \leqslant \frac{c\|h\|^{n+1}}{(n+1)!},$$

что, в силу (58.91), и означает справедливость формулы (58.87). □

Формула Тейлора (58.89) является обобщением формул Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, полученные ранее как для скалярного случая (см. пп. 13.2 и 39.1), так и для векторного (см. пп. 15.2 и 50.1).

§ 59

Линейные пространства со скалярным произведением

59.1. Скалярное и почти скалярное произведения

В этом параграфе будут изучены более узкие, чем рассмотренные ранее, типы пространств, содержащие в себе как частный случай нормированные (соответственно полунормированные) пространства.

Будут рассмотрены пространства, являющиеся обобщением n-мерных векторных арифметических евклидовых пространств (см. п. 35.4).

Определение 1. *Действительная функция, определенная на множестве упорядоченных пар элементов действительного линейного пространства X и обычно обозначаемая (x, y), $x \in X$, $y \in X$, называется скалярным произведением, если она для любых точек $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ и любых чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяет следующим условиям*:

1^0. $(x, y) = (y, x)$ (к о м м у т а т и в н о с т ь).

2^0. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (л и н е й н о с т ь).

3^0. $(x, x) \geqslant 0$.

4^0. *Если* $(x, x) = 0$, *то* $x = 0$.

Свойства 3^0 и 4^0 называются *положительной определенностью скалярного произведения*.

Конечномерное линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым пространством.

Определение 2. *Действительная функция, обозначаемая также обычно* (x, y), *определенная на множестве упорядоченных пар элементов действительного линейного пространства* X, $x \in X$, $y \in X$, *и удовлетворяющая условиям* 1^0, 2^0, 3^0, *называется почти скалярным произведением.*

Согласно этому определению, скалярное произведение является, конечно, и почти скалярным.

Свойство 3^0 почти скалярного произведения называется его *положительной полуопределенностью.*

В силу свойств 1^0 и 2^0 почти скалярного произведения, оно является билинейным отображением пространства $X^2 = X \times X$ в пространство действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Из свойства 2^0 почти скалярного произведения следует, что для любого элемента $x \in X$ выполняется равенство $(x, 0) = 0$ (здесь нуль в левой части равенства — нуль пространства X, а нуль в правой части — нуль действительных чисел).

В самом деле, $(x, 0) = (x, 0 \cdot 0) \underset{2^0}{=} 0(x, 0) = 0$.

Аналогично вводится понятие и почти скалярного (в частности, скалярного) произведения в комплексном линейном пространстве X. В этом случае комплекснозначная функция (x, y) называется почти скалярным (соответственно скалярным) произведением, если она удовлетворяет свойству 2^0 для любых комплексных чисел λ и μ, свойству 3^0 и свойству

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

где, как всегда, черта над числом обозначает сопряженное ему комплексное число.

В этом случае скалярное произведение уже не является билинейным отображением в смысле определения 12 п. 58.1, так как оно не линейно по второму аргументу:

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \bar{\lambda}\, \overline{(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y).$$

В дальнейшем под линейным пространством будем понимать действительное линейное пространство, если не оговорено что-либо другое.

Линейные пространства, для элементов которых определена операция скалярного (почти скалярного) произведения, называются *линейными пространствами со скалярным* (*почти скалярным*) *произведением.*

ЛЕММА 1 (неравенство Коши—Шварца). *Если* (x, y) — *почти скалярное произведение в линейном пространстве* X, *то для любых* $x \in X$ *и* $y \in X$ *справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\,\sqrt{(y, y)}\,. \tag{59.1}$$

СЛЕДСТВИЕ 1 (неравенство треугольника). *Для любых* $x \in X$ *и* $y \in X$ *имеет место неравенство*

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\,.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* (x, y) — *почти скалярное* (*скалярное*) *произведение в линейном пространстве* X, *то функция*

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)} \tag{59.2}$$

является полунормой (*соответственно нормой*) *в этом пространстве, а неравенство Коши—Шварца* (59.1) *можно записать в виде*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{59.3}$$

Доказательство леммы. В силу свойства 3^0 почти скалярного произведения, для любого действительного числа λ имеем

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0.$$

Применив свойства 1^0 и 2^0 почти скалярного произведения, получим

$$\lambda^2(x, x) + 2\lambda(x + y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Если $(x, x) = 0$, то $2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0$. Так как это справедливо для любого действительного числа λ, то $(x, y) = 0$ $\Bigl($действительно, например, при $(x, y) > 0$ на λ будет иметь место ограничение $\lambda > -\frac{(y, y)}{2(x, y)}\Bigr)$. Следовательно, неравенство (59.1) справедливо — обе его части обращаются в нуль.

Если же $(x, x) \neq 0$, то дискриминант получающегося квадратного относительно λ трехчлена неположителен

$$(x, y)^2 - (x, x)\,(y, y) \leqslant 0,$$

а это равносильно неравенству (59.1). □

Докажем теперь следствие 1.

$$(x + y, x + y) \underset{2^0\,3^0}{=} |(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)| \underset{1^0\,3^0}{\leqslant}$$

$$\leqslant (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \underset{59.1}{\leqslant}$$

$$\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} = \left(\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\right)^2. \ \square$$

Свойства полунормы (соответственно нормы) для функции (59.2) (следствие 2) проверяются непосредственно:

1^0. $\|x\| \underset{(59.2)}{=} \sqrt{(x,\, x)} \geqslant 0$;

2^0. $\|\lambda x\| \underset{(59.2)}{=} \sqrt{(\lambda x,\, \lambda x)} \underset{2^\circ}{=} \sqrt{\lambda^2 (x,\, x)} = |\lambda| \sqrt{(x,\, x)} = |\lambda|\, \|x\|$;

3^0. $\|x + y\| \underset{(59.2)}{=} \sqrt{(x + y,\, x + y)} \underset{\text{Сл.1}}{\leqslant} \sqrt{(x,\, x)} + \sqrt{(y,\, y)} \underset{(59.2)}{=}$ $= \|x\| + \|y\|$.

Если (x, y) — скалярное произведение и $\|x\| = 0$, т. е. $\sqrt{(x,\, x)} = 0$, то, согласно свойству 4^0 скалярного умножения, $x = 0$. □

Из доказанного непосредственно вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Каждое линейное пространство со скалярным* (*соответственно почти скалярным*) *произведением является нормированным* (*соответственно полунормированным*) *пространством с нормой* (*соответственно полунормой*), *определяемой формулой* (59.2), *а следовательно, линейное пространство со скалярным произведением есть метрическое пространство с метрикой* (58.18).

Полунорму (59.2) будем называть *полунормой* (соответственно *нормой*), *порожденной заданным почти скалярным* (*скалярным*) *произведением*. Расстояние (58.18), порожденное нормой (59.2) линейного пространства со скалярным произведением, будем также называть *расстоянием*, *порожденным заданным скалярным произведением*.

Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то по аналогии с конечномерным случаем косинус угла $\varphi = \widehat{xy}$ между векторами $x \in X$ и $y \in X$ линейного пространства x со скалярным произведением определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(x,\, y)}{\|x\|\|y\|},$$

а сам угол φ определяется этим значением косинуса с точностью до числа, кратного 2π. Таким образом, в этом случае

$$(x,\, y) = \|x\|\, \|y\| \cos\varphi.$$

Если $l \in X$, $\|e\| = 1$, то вектор $x_l = (x,\, l)e$ называется проекцией вектора x на прямую $y = te$, $-\infty < t < +\infty$, а число

$$(x,\, e) = \|x\| \cos \widehat{xe}$$

— величиной этой проекции.

Неравенство Коши—Шварца в виде (59.3) справедливо и для комплексных линейных пространств (для них, как и для действительных пространств, $\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x,\, x)}$), только доказы-

вается оно несколько сложнее. Пусть X — комплексное линейное пространство с почти скалярным произведением. Для любых $x \in X$, $y \in Y$ и комплексного числа $\lambda \in \boldsymbol{C}$, в силу свойства 3^0 почти скалярного произведения, имеем

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0. \tag{59.4}$$

Раскрывая скобки согласно свойствам 1^0 и 2^0, получим

$$0 \leqslant (\lambda x + y, \lambda x + y) =$$
$$= \lambda\bar{\lambda}(x, x) + \lambda(x, y) + \bar{\lambda}\,\overline{(x, y)} + (y, y). \tag{59.5}$$

Пусть t — произвольно выбранное действительное число. Выберем теперь $\lambda \in \boldsymbol{C}$ так, чтобы

$$\lambda(x, y) = t|(x, y)| \tag{59.6}$$

(подробнее: если $(x, y) \neq 0$, то $\lambda = \frac{t|(x, y)|}{(x, y)}$, а если $(x, y) = 0$, то $\lambda = t$). Тогда

$$\bar{\lambda}\,\overline{(x, y)} = t|(x, y)|. \tag{59.7}$$

Перемножив равенства (59.6) и (59.7), получим

$$\lambda\bar{\lambda}(x, y)\overline{(x, y)} = t^2|(x, y)|^2;$$

отсюда при $(x, y) \neq 0$ имеем

$$\lambda\bar{\lambda} = t^2, \tag{59.8}$$

а в силу того, что $\lambda = t$ при $(x, y) = 0$, равенство (59.8) имеет место всегда. Далее,

$$\lambda(x, y) + \bar{\lambda}\,\overline{(x, y)} \underset{\substack{(59.6),\\(59.7)}}{=} 2t|(x, y)|. \tag{59.9}$$

Поэтому

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \underset{\substack{(59.5),\\(59.8),\\(59.9)}}{=} t^2(x, x) + 2t|x, y)| + (y, y) \underset{(59.5)}{\geqslant} 0.$$

Следовательно, дискриминант получившегося квадратичного трехчлена неположителен:

$$|(x, y)|^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

а это равносильно неравенству (59.3). □

Существуют нормированные пространства, в которых нельзя ввести скалярные произведения, порождающие нормы, эквивалентные соответствующим заданным в них нормам. Можно показать, что примером такого пространства является пространство $\boldsymbol{C}[a, b]$ непрерывных на отрезке функций.

59.2. Примеры линейных пространств со скалярным произведением

1. В множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ обычная операция умножения является и скалярным умножением в смысле определения 1.

В множестве комплексных чисел C *скалярным произведением* чисел x и y является произведение $x\bar{y}$.

2. Действительное арифметическое n-мерное векторное пространство $\boldsymbol{R}^n$, в котором скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$ определяется по формуле (см. (35.48) в п. 35.4)

$$(x, y) = x_1, y_1 + \dots + x_n y_n,$$

является линейным пространством со скалярным произведением в смысле определения 1 п. 59.1. В этом случае норма элемента $x \in \boldsymbol{R}^n$ совпадает с его длиной $|x|$ (см. п. 58.3, пример 2):

$$\|x\| = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

а соответствующая метрика с расстоянием в n-мерном арифметическом точечном пространстве:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Напомним, что для этого пространства неравенство Коши—Шварца было доказано нами раньше (см. лемму 1 в п. 35.1 и неравенство (35.55) в п. 35.4).

В арифметическом комплексном пространстве $\boldsymbol{C}^n$ (см. п. 58.1) скалярное произведение вводится по формуле

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n,$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \boldsymbol{C}^n.$$

3. Рассмотрим линейное полунормированное пространство $RL_2(a, b)$ из примера 7, п. 58.3 при $p = 2$, состоящее из функций с интегрируемым (вообще говоря, в несобственном смысле) на промежутке с концами $x = a$ и $x = b$ квадратом, т. е. из таких функций f, для которых

$$\int_a^b f^2(t)dt < +\infty, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty.$$

Пусть $f \in RL_2(a, b)$ и $g \in RL_2(a, b)$. Вспомним, чго произведение функций, интегрируемых по Риману на некотором отрез-

ке, также интегрируемо по Риману на этом отрезке. Поэтому на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$, на котором функции f и g интегрируемы по Риману, будет интегрируемо по Риману и их произведение и, следовательно, имеет смысл рассматривать несобственный интеграл

$$\int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{59.10}$$

Кроме того, в любой точке t, в которой определены функции f и g, справедливо неравенство

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{f^2(t) + g^2(t)}{2}^{*},$$

поэтому интеграл (59.10) сходится, и притом абсолютно.

Почти скалярное произведение в этом пространстве определяется формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{59.11}$$

Свойства 1^0, 2^0, 3^0 почти скалярного произведения легко проверяются. Полученное пространство с почти скалярным произведением (59.11) будем также обозначать через $RL_2(a, b)$.

Заметим, что неравенство (59.2) в этом случае может быть записано следующим образом:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt;$$

оно, как это уже отмечалось раньше, является частным случаем неравенства Гёльдера (см. п. 28.2*) при $p = q = 2$ и называется интегральным неравенством Коши—Буняковского.

Полунорма, порожденная почти скалярным произведением (59.11), имеет, очевидно, вид

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}, \tag{59.12}$$

т. е. совпадает с полунормой (58.14), рассмотренной в примере 7 п. 58.3 при $p = 2$. Отсюда следует, что почти скалярное произведение (59.11) не является скалярным, так как в п. 58.3 было установлено, что полунорма (58.14) не является нормой при всех $p \geqslant 1$.

---

* Оно следует из очевидного неравенства $(|f(t)| - q(t)|)^2 \geqslant 0$.

Однако в подпространстве $CL_2(a, b)$ пространства $RL_2(a, b)$, состоящем только из функций, непрерывных на рассматриваемом промежутке, почти скалярное произведение (59.11) является уже скалярным, ибо, как было показано в примере 8 п. 58.3, в этом случае

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}\,,\ f \in CL_2(a, b)$$

является не только полунормой, но и нормой.

Для расстояния между двумя непрерывными функциями f и g в этом пространстве получаем формулу

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left\{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx\right\}^{1/2}. \qquad (59.13)$$

Мы уже встречались со сходимостью функций в смысле этой метрики (см., например, следствие теоремы 12 в п. 55.9).

Подчеркнем, что все сказанное справедливо для функций, определенных как на конечных, так и на бесконечных промежутках $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Пусть X — линейное пространство с почти скалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются *эквивалентными*, если $\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = 0$. Обозначим через $\tilde{x}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства X. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ и μ — числа. Определим $\lambda\tilde{x} + \mu\tilde{y}$ как элемент множества $\tilde{X}$, содержащий $\lambda x + \mu y$, и положим $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$. Доказать, что эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$ и $y \in \tilde{y}$, и что $\tilde{X}$ является линейным пространством, а $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — скалярным произведением в нем.

59.3. Свойства линейных пространств со скалярным произведением. Гильбертовы пространства

Линейное пространство с почти скалярным произведением является, согласно (59.2), и полунормированным. Поэтому для него определены понятие сходящейся последовательности, ее предела и понятие непрерывной функции (см. п. 58.4).

ЛЕММА 3. *Почти скалярное произведение* (x, y) *является непрерывной функцией* (*см. п.* 58.4) *своих аргументов* x *и* y *на множестве* $X \times X$, *на котором оно задано*: $x \in X$, $y \in X$.

Доказательство. В самом деле, для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in X$, $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство

$$|(x_0, y_0) - (x, y)| = |(x_0 - x, y_0) + (x, y_0 - y)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_0 - x\| \, \|y_0\| + \|x\| \, \|y - y_0\|, \qquad (59.14)$$

из которого сразу следует указанная непрерывность почти скалярного произведения. Действительно, если $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$, то, заметив, что $\|x\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0\| < \|x_0\| + \delta$, из (59.14) получим

$$|(x_0, y_0) - (x, y)| < \delta\|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\delta.$$

Отсюда следует, что при любом фиксированном числе $\varepsilon > 0$ всегда можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что при $x \in U\,(x_0, \delta)$, $y \in U\,(y_0, \delta)$ выполняется неравенство $|(x_0, y_0) - (x, y)| < \varepsilon$; для этого достаточно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\,\delta < \varepsilon$; это, очевидно, всегда возможно. □

В пространстве X с почти скалярным произведением можно говорить о сходимости рядов по полунорме, порожденной почти скалярным произведением: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, $x = 1, 2, \ldots$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$ сходится по указанной полунорме к некоторому элементу $s \in X$, который называется суммой ряда: $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Отметим, что сумма ряда в пространстве с почти скалярным произведением определена неоднозначно. Однако, если $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $s^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, т. е. s и s^* суть суммы одного и того же ряда, то $\|s^* - s\| = 0$ (см. п. 58.4), и поэтому для любого элемента $a \in X$ имеет место равенство $(s^*, a) = (s, a)$. Действительно, в силу неравенства Коши — Шварца для почти скалярного произведения,

$$|(s^*, a) - (s, a)| = |(s^* - s, a)| \leqslant \|s^* - s\| \, \|a\| = 0.$$

Из непрерывности почти скалярного произведения во всем пространстве следует, например, что ряды в пространстве с почти скалярным произведением можно умножать почленно не только на числовые множители, но и на элементы самого пространства. Докажем это.

ЛЕММА 4. *Пусть в пространстве X с почти скалярным произведением задан сходящийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s, \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для всякого элемента $a \in X$ числовой ряд, получающийся из данного ряда почленным умножением его на a, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = (s, a).$$

Иначе говоря, для сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и любого элемента $a \in X$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, a \right).$$

Доказательство. Так как

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k, a) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, a \right) =$$

$$= \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k, a \right) = (s, a).$$

Пример. Рассмотрим пространство $RL_2[a, b]$ из примера 3 п. 59.2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ функций $f_n \in RL_2[a, b]$ сходится в этом пространстве и его суммой является функция $f \in RL_2[a, b]$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), \ t \in [a, b],$$

т. е. последовательность частичных сумм

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$$

этого ряда сходится к функции f в смысле среднего квадратичного:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt = 0.$$

Тогда для любой функции $\varphi(x) \in RL_2[a, b]$, согласно лемме 4,

$$(f, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, \varphi),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, \varphi(x) dx.$$

В частности, при $\varphi = 1$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Иначе говоря,

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Итак, *если ряд функций с интегрируемым квадратом на отрезке* $[a, b]$ *сходится на нем в смысле среднего квадратичного к некоторой функции также с интегрируемым квадратом на* $[a, b]$, *то ряд можно почленно интегрировать.*

Из равномерной сходимости на отрезке последовательности непрерывных функций вытекает сходимость этой последовательности к той же функции и в смысле среднего квадратичного (см. п. 58.3), поэтому из доказанного здесь утверждения следует, что *если ряд непрерывных функций сходится на отрезке равномерно, то его можно почленно интегрировать.*

Этот результат был получен ранее другим путем в главе о рядах (см. теорему 9 в п. 32.4).

Определение 3. *Два линейных пространства X и Y со скалярным (почти скалярным) произведением называются изоморфными, если они изоморфны как линейные пространства, и отображение f, отображающее пространство X на пространство Y и осуществляющее этот изоморфизм, сохраняет скалярное произведение (почти скалярное произведение), т. е. для любых двух элементов $x \in X$ и $y \in X$ выполняется равенство*

$$(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Два изоморфных линейных пространства со скалярным (почти скалярным) произведением могут отличаться лишь природой своих элементов, а не метрическими свойствами, поэтому в дальнейшем изоморфные линейные пространства со скалярным (почти скалярным) произведением часто не будут различаться.

Поясним это на примере. Пусть X и Y^* — линейные пространства со скалярным (почти скалярным) произведением и пусть f — изоморфное отображение пространства X на множество $Y \subset Y^*$. Тогда, «отождествляя» элементы пространства X с соответствующими им элементами множества Y, можно рассматривать пространство X как подпространство пространства Y^*. Под этим понимается (сравните с соответствующими конструкциями в пп. 57.1 и 58.4) рассмотрение линейного пространства X^*, состоящего из элементов пространства X и элементов

множества $Y^* \setminus Y$. При этом в пространстве X^* операции сложения элементов и умножения их на число вводятся так же, как это было сделано после определения 18 в п. 58.4, а скалярное (почти скалярное) произведение $(x, y)_{X^*}$, $x \in X^*$, $y \in X^*$, определяется в пространстве через скалярное (почти скалярное) произведение в пространстве Y^* с помощью биекции $F : X^* \to Y^*$, задаваемой формулой (58.17), следующим образом:

$$(x, y)_{X^*} = (F(x), F(y)),$$

где в правой части стоит скалярное (почти скалярное) произведение в пространстве Y^*. Легко проверить, что пространство X^* изоморфно пространству Y^*.

УПРАЖНЕНИЯ. 2. Доказать, что при фиксированном n все действительные n-мерные линейные пространства со скалярным произведением изоморфны между собой.

3. Доказать, что всякое конечномерное линейное пространство со скалярным произведением полно в смысле метрики, порожденной скалярным произведением.

Определение 4. *Линейное пространство со скалярным произведением, полное в смысле метрики, порожденной заданным скалярным произведением, называется гильбертовым пространством.*

Просто же линейное пространство со скалярным произведением называют также предгильбертовым пространством.

Это название оправдывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое предгильбертово пространство X содержится, и плотно, в некотором гильбертовом пространстве X^*.*

Доказательство. Согласно теореме 4 п. 57.5 и теореме 2 п. 58.5, достаточно показать, что на пополнение X^* линейного нормированного пространства X можно продолжить с X скалярное произведение с сохранением свойств 1^0—4^0. Это можно сделать с помощью предельного перехода. Действительно, так как $\overline{X} = X^*$, то для любой пары точек $x \in X^*$ и $y \in X^*$ существуют последовательности точек $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Покажем, что существует $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. В самом деле, из неравенства (59.14) следует, что для всех натуральных m и n

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \leqslant \|x_m - x_n\| \, \|y_m\| + \|x_n\| \, \|y_m - y_n\|.$$

Так как, в силу сходимости, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены по норме и являются фундаментальными, то из этого неравенства следует, что числовая последовательность $\{(x_n, y_n)\}$ также фундаментальная и, следовательно, сходится.

Положим, по определению, $(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. Легко проверить, используя предельный переход, что это определение не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $x_n \to x$, $y_n \to y$ и что для таким образом определенной функции (x, y) выполняются свойства 1^0—4^0 скалярного произведения. □

Полученное гильбертово пространство называется *пополнением исходного предгильбертова пространства*.

Примером гильбертова пространства является n-мерное евклидово пространство (см. п. 35.4). Другие примеры будут рассмотрены далее.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что предгильбертово пространство, изоморфное гильбертову пространству, само является гильбертовым.

59.4. Фактор-пространства

Пусть для элементов некоторого множества X определено понятие их эквивалентности (иногда говорят «операции отождествления элементов»):

$$x \sim y, \quad x, y \in X,$$

обладающее следующими свойствами:

1^0. *Каждый элемент эквивалентен сам себе*: $x \sim x$, $x \in X$.

2^0. *Соотношение эквивалентности коммутативно*: *если* $x \sim y$, *то* $y \sim x$, $x, y \in X$.

3^0. *Соотношений эквивалентности ассоциативно*: *если* $x \sim y$ *и* $y \sim x$, *то* $x \sim z$, $x, y, z \in X$.

Множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов (отождествленные эквивалентные элементы), называется *фактор-множеством* множества X, соответствующим заданной эквивалентности его элементов. Элементы фактор-множества называются обычно классами эквивалентности (см. далее § 63). Переход от множества к его фактор-множеству называется *факторизацией* множества.

Мы уже встречались с подобной конструкцией, например при доказательстве теоремы о пополнении метрического пространства (см. теорему 4 в п. 57.5).

Пусть X — линейное пространство, X_0 — его подпространство, а элементы $x, y \in X$ назовем эквивалентными, если

$$x - y \in X_0. \qquad (59.15)$$

В этом случае фактор-множество, соответствующее эквивалентности (59.15), называется фактор-пространством пространства X по подпространству X_0 и обозначается $X \,/\, X_0$.

ЛЕММА 5. *Фактор-пространство линейного пространства X по его подпространству X_0 является линейным пространством.*

Доказательство. Пусть $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ — элементы фактор-пространства $X \,/\, X_0$, т. е. классы эквивалентности (59.15), $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, λ, μ — числа (действительные или комплексные в зависимости от того, какие рассматриваются линейные пространства) и C — класс эквивалентности, содержащий элемент $\lambda a_0 + \mu b_0$. Положим

$$\lambda A + \mu B = C. \qquad (59.16)$$

Это определение корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора элементов в классах эквивалентности. В самом деле, если $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, то $a_1 \sim a_0$, $b_1 \sim b_0$. Согласно определению (59.15), это означает, что $a_1 - a_0 \in X_0$ и $b_1 - b_0 \in X_0$. Так как X_0 является подпространством пространства X, то $\lambda\,(a_1 - a_0) + \mu(b_1 - b_0 \in X_0$, поэтому

$$(\lambda a_1 + \mu b_1) - (\lambda a_0 + \mu b_0) = \lambda\,(a_1 - a_0) + \mu\,(b_1 - b_0) \in X_0$$

и, таким образом, $\lambda a_1 + \mu b_1 \sim \lambda\, a_0 + \mu\, b_0$, т. е. элемент $\lambda\, a_1 + \mu\, b_1$ принадлежит тому же классу эквивалентности C, что и элемент $\lambda\, a_0 + \mu\, b_0$.

Операция $\lambda A + \mu B$, определенная (нулевым классом) равенством (59.16) для элементов фактор-пространства X/X_0, удовлетворяет аксиомам линейного пространства, так как этим аксиомам удовлетворяет линейная операция $\lambda a + \mu b$ над элементами пространства X, $a, b \in X$.

Отметим, что *нулевым элементом* фактор-пространства $X \,/\, X_0$ (нулевым классом) является подпространство X_0, которое состоит, очевидно, из всех элементов пространства X, эквивалентных его нулю. Действительно, поскольку X_0 подпространство, оно содержит нуль: $0 \in X_0$, а условие $x \sim 0$, согласно определению (55.15), равносильно условию $x = x - 0 \in X_0$.

Если A — какой-либо класс эквивалентности и $a \in A$, то, в силу определения (52.16), сумма $A + X_0$ является классом эквивалентности, содержащим элемент $a + 0 = a$, т. е. классом A. Это и доказывает, что класс X_0 является нулем фактор-пространства X/X_0, т. е. для любого $A \in X/X_0$ имеет место равенство $A + X_0 = A$. □

Если X — линейное полунормированное пространство, то множество

$$X_0 = \{x \in X : \|x\| = 0\} \qquad (59.17)$$

является его подпространством.

В самом деле, если $x, y \in X$, то для любых чисел λ, μ имеем

$$0 \leqslant \|\lambda x + \mu y\| \leqslant |\lambda|\,\|x\| + |\mu|\,\|y\| = 0. \qquad (59.18)$$

Из этого следует, что $\|\lambda x + \mu y\| = 0$. А это и означает, что $\lambda x + \mu y \in X_0$.

ЛЕММА 6. *Если X — полунормированное линейное пространство и $X_0 = \{x \in X : \|x\| = 0\}$, то фактор-пространство X / X_0 является нормированным линейным пространством.*

Доказательство. Пусть $A = \{a\} \in X/X_0$ и $a_0 \in A$. Положим

$$\|A\| = \|a_0\|. \qquad (59.19)$$

Это определение не зависит от выбора элементов в классах эквивалентности. Действительно, если $a_1 \in A$ и, следовательно, $a_1 - a_0 \in X_0$, т. е. $\|a_1 - a_0\| \underset{(59.17)}{=} 0$, то, в силу свойства полунормы,

$$|\,\|a_1\| - \|a_0\|\,| \leqslant \|a_1 - a_0\| = 0$$

и поэтому

$$\|a_1\| = \|a_0\|. \qquad (59.20)$$

То, что функция $\|A\|$, $A \in X / X_0$, удовлетворяет аксиомам полунормы, следует из того, что им удовлетворяет полунорма $\|a\|$, $a \in X$, пространства X. Покажем, что полунорма $\|A\|$ является в действительности нормой, т. е. что из равенства $\|A\| = 0$ следует, что $A = 0$.

Пусть $\|A\| = 0$ и $a \in A$. Так как $\|a - 0\| = \|a\| = \|A\| = 0$, то элемент a эквивалентен нулю: $a \sim 0$ и, следовательно, нуль входит в класс A. Это означает, что A является нулевым классом: $A = 0$. □

Если X — линейное пространство с почти скалярным произведением, то множество $X_0 = \{x \in X : (x, x) = 0\}$ является его под-

пространством. Это следует из того, что функция $\sqrt{(x, x)} = \|x\|$ является полунормой и $X_0 = \{x \in X : \|x\| = 0\}$.

ЛЕММА 7. *Если X — линейное пространство с почти скалярным произведением и $X_0 = \{x \in X : (x, x) = 0\}$, то фактор-пространство X / X_0 является линейным пространством со скалярным произведением.*

Доказательство. Пусть, как всегда, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Если $a_0 \in A \in X / X_0$, $b_0 \in B \in X / X_0$, то положим

$$(A, B) = (a_0, b_0). \tag{59.21}$$

Покажем, что это определение не зависит от выбора элементов в классах эквивалентности.

Пусть $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, тогда $\|a_1 - a_0\| = \|b_1 - b_0\| \underset{(59.15)}{=} 0$ и поэтому

$$|(a_1, b_1) - (a_0, b_0)| = |(a_1, b_1) - (a_0, b_1) + (a_0, b_1) - (a_0, b_0)| \leqslant$$

$$\leqslant |(a_1 - a_0, b_1)| + |(a_0, b_1 - b_0)| \leqslant \|a_1 - a_0\| \, \|b_1\| + \|a_0\| \, \|b_1 - b_0\| = 0,$$

и, следовательно,

$$(a_1, b_1) = (a_0, b_0).$$

Функция (A, B) обладает свойствами 1^0, 2^0, 3^0 скалярного произведения (см. определение 1 в п. 59.1), так как этими свойствами обладает почти скалярное произведение (a, b) в пространстве X. Тем самым функция (A, B) также является почти скалярным произведением. Покажем, что она в действительности представляет собой скалярное произведение, т. е. что из условия

$$(A, A) = 0 \tag{59.22}$$

следует, что $A = 0$.

В самом деле, почти скалярному произведению (a, b) в пространстве X соответствует полунорма

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)}, \quad a \in X \tag{59.23}$$

(см. следствие 2 леммы 6 в п. 52.4), которая, согласно лемме 6, порождает в фактор-пространстве X / X_0 норму

$$\|A\| = \|a\|, \; a \in A \in X / X_0. \tag{59.24}$$

Но

$$(A, A) \underset{(59.21)}{=} (a, a) \underset{(59.23)}{=} \|a\| \underset{(59.24)}{=} \|A\|.$$

Поэтому из условия (59.22) следует, что норма $\|A\| = 0$, а поэтому $A = 0$. □

59.5. Пространство L_2

Напомним (см. пример 3 в п. 59.1), что линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением, определенным по формуле (59.11), обозначается через $CL_2[a, b]$.

Норма в пространстве $CL_2[a, b]$ определяется формулой (59.12).

ЛЕММА 8. *Пространство $CL_2[a, b]$ не является гильбертовым.*

Доказательство. Чтобы убедиться, что всякое пространство $CL_2[a, b]$ не является полным, достаточно рассмотреть пространство $CL_2[a, b]$ для некоторого фиксированного отрезка (почему?). Возьмем для определенности отрезок $[-1, 1]$ и приведем пример фундаментальной в пространстве $CL_2[-1, 1]$ последовательности функций, не сходящейся в этом пространстве.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{если } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{59.25}$$

(рис. 12). Очевидно, что функции $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на отрезке $[-1; 1]$. Замечая далее, что $|f_n(x)| \leqslant 1$, для $m > n$ имеем

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f_m(x)|^2] dx \leqslant 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n},$$

откуда, очевидно, следует, что последовательность (59.25) — фундаментальная в пространстве $CL_2[a, b]$.

Действительно, если задано $\varepsilon > 0$, то, выбирая n_0 так, что $8/n_0 < \varepsilon$, для всех $n > n_0$ и всех $m > n$ будем иметь $\|f_n - f_m\| < \frac{8}{n} < \frac{8}{n_0} < \varepsilon$. Поскольку

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

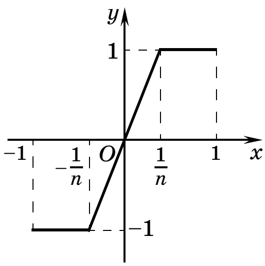


Рис. 12

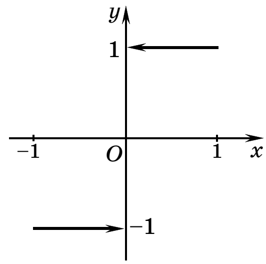


Рис. 13

естественно ожидать, что если последовательность $\{f_n\}$ сходится в смысле среднего квадратичного, то она сходится к той же функции, к которой она сходится поточечно, т. е. к функции (рис. 13):

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Однако эта функция f разрывна и поэтому $f \notin CL_2[0, 1]$. Следовательно, естественно ожидать, что последовательность $\{f_n\}$ не имеет предела в пространстве $CL_2[a, b]$. Покажем это.

Нетрудно убедиться, что последовательность (59.25) сходится на отрезке $[-1, 1]$ в смысле полунормы (59.12) к функции f. Действительно,

$$\|f - f_n\|^{2*} = \int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1/n}^{1/n} [|f(x)| + |f_n(x)|^2] dx \leqslant 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

так как

$$|f(x)| \leqslant 1, \quad |f_n(x)| \leqslant 1, \quad x \in [-1, 1]. \tag{59.26}$$

Предел по полунорме не единствен и поэтому возникает вопрос: не существует ли еще и непрерывной функции, которая также является пределом последовательности $\{f_n\}$ в смысле среднего квадратичного. Покажем, что такой функции не

* Так как $f - f_n$ уже не является непрерывной функцией, то здесь символ $\|\varphi\|$ обозначает уже полунорму (52.12) функции φ. Это следует иметь в виду и в дальнейших рассмотрениях.

существует. Допустим противное. Пусть существует такая непрерывная на отрезке [−1, 1] функция $g(x)$, что

$$\lim_{n \to \infty} \|g - f_n\| = 0. \qquad (59.27)$$

Тогда

$$\|f - g\| = \|(f - f_n) + (f_n - g)\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n - g\|,$$

где оба слагаемых правой части, в силу (59.26) и (59.27), стремятся к нулю при $n \to \infty$, а левая часть не зависит от n, следовательно,

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx = \|f - g\|^2 = 0;$$

тем более

$$\int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0, \ \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)\|^2 dx = 0. \qquad (59.28)$$

Рассмотрим, например, случай $x \geqslant 0$. Поскольку функции f и g непрерывны на интервале (0, 1), в силу (59.28), они совпадают на этом интервале (см. свойство 9^0 определенного интеграла в п. 24.1). Поэтому

$$g(+0) = \lim_{x \to +0} g(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = 1.$$

Аналогично из рассмотрения случая $x \leqslant 0$ будем иметь

$$g(-0) = \lim_{x \to -0} f(x) = -1,$$

т. е. g — разрывная в нуле функция.

Полученное противоречие и доказывает утверждение. □

Итак, линейное пространство $CL_2[a, b]$ не полно. Однако мы знаем, что всякое предгильбертово пространство можно дополнить до полного, в частности это можно сделать и с рассматриваемым пространством. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже, а сейчас рассмотрим еще одно пространство.

Возьмем более широкий класс функций чем класс непрерывных, а именно полунормированное пространство $RL_2(a, b)$ функций, для которых на некотором промежутке с концами $x = a$ и $x = b$ конечен интеграл

$$\int_{a}^{b} |f(x)^2 dx, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,$$

с полунормой

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

(см. пример 3 в п. 59.2) и построим с помощью его факторизации по подпространству $RL_2^0(a, b)$ функций с нулевой полунормой:

$$RL_2^0(a, b) = \{f \in RL_2(a, b) : \|f\|_2 = 0\},$$

нормированное пространство

$$\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2(a, b) = RL_2(a, b)/RL_2^0(a, b).$$

(В случае, когда промежуток с концами $x = a$ и $x = b$ является отрезком $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, вместо $RL_2(a, b)$ и $\widetilde{RL}_2(a, b)$ пишут также $RL_2[a, b]$ и, соответственно, $\widetilde{RL}_2[a, b]$.)

Замечание 1. Элементами пространства $\widetilde{RL}_2(a, b)$ являются классы эквивалентных функций. В данном случае функции называются эквивалентными (см. п. 59.4), если полунорма $\|\cdot\|_2$ их разности равна нулю, иначе говоря, если равен нулю интеграл по рассматриваемому промежутку от квадрата их разности. Однако в математической литературе часто встречается выражение «функция из пространства $\widetilde{RL}_2$». Это условное выражение означает просто, что речь идет о функции с интегрируемым квадратом и, следовательно, принадлежащей одному из рассматриваемых классов эквивалентных функций, т. е. являющейся его представителем. Это выражение удобно, так как операция сложения, умножения на число и операция скалярного умножения классов эквивалентных функций сводятся к соответствующей операции над их представителями, причем результат не зависит от выбора указанных представителей. Это обстоятельство в известном смысле оправдывает также и часто употребляющееся условное выражение «пространство $\widetilde{RL}_2(a, b)$ состоит из функций с интегрируемым квадратом»; в этом случае пространство $\widetilde{RL}_2$ нередко обозначается просто через RL_2.

Замечание 2. Если в некотором классе эквивалентных функций, т. е. в элементе пространства $\widetilde{RL}_2(a, b)$, имеется непрерывная функция, то в этом классе нет другой непрерывной функции, так как если непрерывные функции эквивалентны, то они равны.

Подмножество непрерывных функций, входящих в пространство $RL_2(a, b)$, обозначается $CL_2(a, b)$.

Покажем, что отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной функции $f \in CL_2(a, b)$ класс эквивалентности $F \in \widetilde{RL}_2(a, b)$, к которому она принадлежит: $f \in F$ является изоморфным. Это отображение называется *естественным ото-*

бражением $CL_2(a, b)$ в $\widetilde{RL}_2(a, b)$. В силу определения операций сложения элементов (являющихся классами эквивалентности), умножения их на число и их скалярного произведения в пространстве $\widetilde{RL}_2(a, b)$, сводящихся к таким же действиям над представителями классов эквивалентности, естественное отображение является линейным и сохраняет скалярное произведение. Оно является взаимно-однозначным отображением (инъекцией) пространства $CL_2(a, b)$ в пространство $\widetilde{RL}_2(a, b)$, так как если бы при этом отображении две непрерывные функции отобразились в один и тот же элемент пространства $\widetilde{RL}_2(a, b)$, т. е. в один и тот же класс эквивалентности, то они обе принадлежали бы этому классу. А это, как было отмечено выше, возможно только в случае, если они являются одной и той же непрерывной функцией.

Для изучения свойств пространства RL_2 предварительно докажем три леммы об аппроксимации принадлежащих ему функций. Вместо $\|\cdot\|_{\widetilde{RL}_2}$ будем для краткости просто писать $\|\cdot\|$.

ЛЕММА 9. *Пусть функция f с интегрируемым квадратом на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая финитная ступенчатая функция φ (см. п. 55.2), что*

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon, \ \operatorname{supp} \varphi \subset (a, b).$$

Иначе говоря, множество ступенчатых функций плотно в пространстве интегрируемых в квадрате функций.

Доказательство. Предположим для простоты, что функция интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta]$, $a < \xi < \eta < b$ (см. п. 55.1). Общий случай легко сводится к этому.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Зафиксируем так ξ и η, чтобы

$$\int_a^\xi f^2(x)dx + \int_\eta^b f^2(x)dx < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{59.29}$$

Это возможно в силу того, что интеграл на отрезке $[a, b]$ от функции f^2 сходится. Функция f, будучи интегрируемой по Риману на отрезке $[\xi, \eta]$, ограничена на нем:

$$|f(x)| \leqslant M, \ \ \xi \leqslant x \leqslant \eta, \tag{59.30}$$

M — постоянная.

Согласно лемме 2 в п. 55.2, для данного $\varepsilon > 0$ существует такая финитная ступенчатая функция φ, что ее носитель $\operatorname{supp} \varphi$ содержится в отрезке $[\xi, \eta]$ (а следовательно, и в интервале (a, b)),

$$|\varphi(x)| \leqslant M, \ x \in [\xi, \eta] \tag{59.31}$$

(это следует из замечания 1 п. 55.2) и

$$\int_{\xi}^{\eta} \big|f(x)| - \varphi(x)\big| dx < \frac{\varepsilon^2}{4M}. \qquad (59.32)$$

Применив последовательно неравенства (59.29), (59.30), (59.31) и (59.32), получим

$$\|f - \varphi\|^2 = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = \int_a^{\xi} f^2(x)dx + \int_{\eta}^{b} f^2(x)dx +$$

$$+ \int_{\xi}^{\eta} [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} + \int_{\xi}^{\eta} [|f(x)| + |\varphi(x)|]\, |f(x) - \varphi(x)| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} + 2M \int_{\xi}^{\eta} |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon^2}{2} + 2M\frac{\varepsilon^2}{4M} = \varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. □

ЛЕММА 10. *Пусть* φ *— финитная ступенчатая функция с носителем, содержащимся в интервале* (a, b)*; тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая финитная непрерывная функция* g *также с носителем, содержащимся в том же интервале* (a, b)*, что*

$$\|g - \varphi\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай характеристической функции полуинтервала, так как всякая финитная ступенчатая функция является конечной линейной комбинацией подобных функций (см. п. 55.2). Итак, пусть задана функция

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } \xi \leqslant x < \eta, \\ 0 \text{ для } x < \xi \text{ и } x \geqslant \eta, \end{cases} \quad a < \xi < \eta < b,$$

и задано $\varepsilon > 0$. Возьмем какое-либо $\alpha > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha < \frac{\varepsilon^2}{8}, \ \alpha < \frac{\eta - \xi}{2},$$

и рассмотрим функцию $g(x)$, график которой изображен на рис. 14. При желании ее можно аналитически описать следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < \xi \text{ и } x > \eta, \\ \dfrac{x - \xi}{\alpha} & \text{для } \xi \leqslant x \leqslant \xi + \alpha, \\ 1 & \text{для } \xi + \alpha < x < \eta - \alpha, \\ \dfrac{\eta - x}{\alpha} & \text{для } \eta - \alpha \leqslant x \leqslant \eta. \end{cases}$$

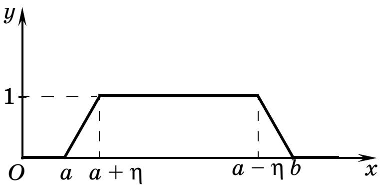


Рис. 14

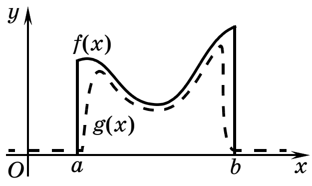


Рис. 15

Очевидно, что $g(x)$ является финитной непрерывной функцией, носитель которой содержится в интервале (a, b). Поскольку $|\chi(x)| \leqslant 1$, $|g(x)| \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$, то

$$\|\chi - g\|^2 = \int_{\xi}^{\eta} [\chi(x) - g(x)]^2 dx = \int_{\xi}^{\xi+\alpha} [\chi(x) - g(x)]^2 dx +$$

$$+ \int_{\eta-\alpha}^{\eta} [\chi(x) - g(x)]^2 dx \leqslant \int_{\xi}^{\xi+\alpha} [|\chi(x)| + |g(x)|]^2 dx +$$

$$+ \int_{\eta-\alpha}^{\eta} [|\chi(x)| + |g(x)|]^2 dx \leqslant 4 \int_{\xi}^{\xi+\alpha} dx + 4 \int_{\eta-\alpha}^{\eta} dx < 8\alpha < \varepsilon^2,$$

т. е. $\|\chi - g\| < \varepsilon$. □

ЛЕММА 11. *Если f является функцией с интегрируемым квадратом на конечном или бесконечном промежутке с концами в точках $x = a$ и $x = b$, то она на этом промежутке является пределом в смысле среднего квадратичного некоторой последовательности непрерывных финитных функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, носители которых лежат на интервале (a, b):*

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n \to \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \qquad (59.33)$$

Доказательство. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в силу леммы 9, существует такая финитная ступенчатая функция φ с носителем, содержащимся в интервале (a, b), что

$$\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а в силу леммы 10, для этой ступенчатой функции φ найдется такая непрерывная финитная с носителем на том же интервале (a, b) функция g, что

$$\|\varphi - q\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно (рис. 15),

$$\|f - g\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|f - g\| < \varepsilon.$$

Выбирая теперь некоторую числовую последовательность $\varepsilon_n \to +0$ при $n \to \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, и обозначая через f_n соответствующую числу ε_n, в силу указанной конструкции, непрерывную финитную с носителем на интервале (a, b) функцию, получим искомую последовательность $\{f_n\}$, удовлетворяющую условию (59.33) (определение предела последовательности функций в смысле среднего квадратичного см. в п. 58.4), и такую, что $\operatorname{supp} f_n \subset (a, b)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. □

Финитные функции, носители которых лежат на интервале (a, b), называются кратко финитными на интервале (a, b) функциями.

Определение 5. *Подмножество пространства $CL_2(a, b)$, состоящее из финитных на интервале (a, b) функций, обозначается $\mathring{C}L_2(a, b)$.*

Очевидно, что лемма 16 означает, что любую функцию с интегрируемым на промежутке с концами в точках $x = a$ и $x = b$ квадратом, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, можно сколь угодно точно в смысле среднего квадратичного приблизить функциями из $\mathring{C}L_2(a, b)$. Ясно, что $\mathring{C}L_2(a, b)$ является линейным предгильбертовым пространством и

$$\mathring{C}L_2(a, b) \subset CL_2(a, b). \tag{59.34}$$

Вернемся теперь к естественному отображению $CL_2(a, b) \to \to \widetilde{RL}_2(a, b)$.

ТЕОРЕМА 2. *Естественное отображение $CL_2(a, b) \to \widetilde{RL}_2(a, b)$, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной на промежутке с концами в точках $x = a$ и $x = b$ функции класс эквивалентности, к которому она принадлежит, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, является изоморфным отображением пространства $CL_2(a, b)$ в $\widetilde{RL}_2(a, b)$, причем образ пространства $\mathring{C}L_2(a, b)$ (а следовательно, в силу (59.34) и пространства $CL_2(a, b)$) плотен в $\widetilde{RL}_2(a, b)$.*

Доказательство теоремы 2. Обозначим через Φ естественное отображение пространства $CL_2(a, b)$ в пространство $\widetilde{RL}_2(a, b)$, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой непрерывной на промежутке с концами в точках $x = a$ и $x = b$

функции f класс эквивалентных функций с интегрируемым на этом промежутке квадратом, которому она принадлежит, иначе говоря, класс эквивалентности, представителем которого она является. Таким образом, если

$$f \in CL_2(a, b) \text{ и } f \in F \in \widetilde{RL}_2(a, b),$$

то $\Phi(f) = F$.

Выше (см. замечание 2) было уже доказано, что отображение Φ является изоморфным.

Покажем, что образ пространства $\mathring{C}L_2(a, b)$ при этом отображении является плотным в пространстве $\widetilde{RL}_2(a, b)$ множеством. Пусть $F \in \widetilde{RL}_2(a, b)$ и функция f является представителем элемента F, т. е. $f \in F$.

Поскольку f является функцией с интегрируемым на рассматриваемом промежутке квадратом, то, согласно лемме 11, она является пределом в смысле среднего квадратичного некоторой последовательности непрерывных финитных на интервале (a, b) функций f_n (см. (59.33)), т. е. $f_n \in \mathring{C}L_2(a, b)$, $n = 1, 2, \dots$. Если $f_n \in F_n \in \widetilde{RL}_2(a, b)$, то, согласно определению полунормы в пространстве $\widetilde{RL}_2(a, b)$, получим

$$\|F_n - f\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f_n - f\|_{RL_2},$$

где справа, как обычно, стоит полунорма (59.12). Отсюда, в силу равенства (59.33), получаем

$$\lim_{n \to \infty} \|F_n - F\|_{\widetilde{RL}_2} = 0. \qquad (59.35)$$

Поскольку класс эквивалентности F являлся произвольно фиксированным элементом пространства $\widetilde{RL}_2(a, b)$, а $F_n = \Phi(f_n)$, где f_n — непрерывная финитная на интервале (a, b) функция и, следовательно, $F_n \in \Phi(\mathring{C}L_2(a, b))$, $n = 1, 2, \dots$, то равенство (59.35) и означает плотность образа множества $\mathring{C}L_2(a, b)$ в пространстве $\widetilde{RL}_2(a, b)$ при отображении Φ.

Для доказательства же плотности образа множества $\widetilde{CL}_2(a, b)$ при его естественном отображении в пространство $\widetilde{RL}_2(a, b)$ заметим, что из включения (59.34) следует очевидным образом, что

$$\Phi(\mathring{C}L_2(a, b)) \subset \Phi(CL_2(a, b)) \subset \widetilde{RL}_2(a, b).$$

А если в каком-либо метрическом пространстве X плотно множество A, т. е. $\overline{A} = X$ и $A \subset B \subset X$, то, конечно, множество B также плотно в X, ибо $\overline{A} \subset \overline{B} \subset X$ и так как $\overline{A} = X$, то и $\overline{B} = X$. Поэтому из плотности множества $\Phi(\overset{\circ}{C}L_2(a, b))$ в пространстве $\widetilde{RL}_2(a, b)$ следует и плотность в нем множества $\Phi\,(CL_2(a, b))$. $\square$

Если отождествить каждую непрерывную функцию $f \in$ $\in CL_2(a, b)$ с классом эквивалентных функций $F \in \widetilde{RL}_2(a, b)$, которому она принадлежит: $f \in F$, т. е. отождествить f с ее образом при естественном отображении Φ, то получим, что $CL_2(a, b))$ является подмножеством пространства $\widetilde{RL}_2(a, b)$:

$$CL_2(a, b) \subset \widetilde{RL}_2(a, b). \qquad (59.36)$$

Это включение называется *естественным вложением* пространства CL_2 в пространство $\widetilde{RL}_2$.

Итак, в силу (59.34) и (59.36), справедливы включения

$$\overset{\circ}{C}L_2(a, b) \subset CL_2(a, b) \subset \widetilde{RL}_2(a, b),$$

причем, согласно теореме 2,

$$\overline{\overset{\circ}{C}L_2(a, b)} = \widetilde{RL}_2(a, b)$$

— множество $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$, а следовательно, и $CL_2(a, b)$, плотны в пространстве $\widetilde{RL}_2(a, b)$.

Можно показать, что пространство $\widetilde{RL}_2(a, b)$ не является полным, т. е. не является гильбертовым пространством.

Задача 5. Доказать, что пространство $\widetilde{RL}_2(a, b)$ не является полным.

Выше было показано (см. п. 59.3), что всякое предгильбертово пространство можно дополнить до полного, т. е. до гильбертова пространства. В частности, это можно сделать и с пространством $\widetilde{RL}_2(a, b)$.

Определение 6. *Пополнение предгильбертова пространства* $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2(a, b)$ *называется лебеговым пространством* $L_2 =$ $= L_2(a, b)$.

В силу определения пополнения,

$$\widetilde{RL}_2(a, b) \subset L_2(a, b) \qquad (59.38)$$

и $\widetilde{RL}_2(a, b)$ плотно в пространстве $L_2(a, b)$, т. е.

$$\overline{\widetilde{RL}_2(a, b)} = L_2(a, b).$$

В силу включений (59.34), (59.36) и (59.38), имеют место естественные вложения

$$\mathring{C}L_2(a, b) \subset CL_2(a, b) \subset \widetilde{RL}_2(a, b) \subset L_2(a, b). \qquad (59.39)$$

Оказывается, что не только $\widetilde{RL}_2$ плотно в пространстве L_2, но и $\mathring{C}L_2$ плотно в L_2.

ТЕОРЕМА 3. *Пространство* $\mathring{C}L_2(a, b)$ *плотно в пространстве* $L_2\,(a, b)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Пространство* $CL_2(a, b)$ *плотно в пространстве* $L_2\,(a, b)$.

Из теоремы 3 и ее следствия непосредственно следует, что пространство $L_2(a, b)$ является пополнением не только пространства $\widetilde{RL}_2$, но и пространств $\mathring{C}L_2(a, b)$ и $CL_2(a, b)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in L_2(a, b)$ и пусть произвольно фиксировано $\varepsilon > 0$. Для простоты все элементы пространства $L_2(a, b)$ будем также обозначать строчными латинскими буквами, хотя они, вообще говоря, и не являются функциями. Так как пространство $L_2(a, b)$ является пополнением пространства $\widetilde{RL}_2\,(a, b)$, то существует такой элемент $g \in \widetilde{RL}_2(a, b)$, что $\|f - g\|_{L_2} < \varepsilon/2$. Согласно включению (59.38) и плотности множества $\mathring{C}L_2(a, b)$, в пространстве $\widetilde{RL}_2(a, b)$, существует такой элемент $h \in \mathring{C}L_2(a, b)$, что

$$\|g - h\|_{L_2} < \varepsilon/2.$$

Поэтому

$$\|f - h\|_{L_2} \leqslant \|f - g\|_{L_2} + \|g - h\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что множество $\mathring{C}L_2(a, b)$ плотно в пространстве $L_2(a, b)$. □

Следствие очевидным образом вытекает из теоремы, так как (как это было показано при доказательстве теоремы 2) ес-

ли подмножество A некоторого множества B, $A \subset B$, плотно в каком-то метрическом пространстве $X \supset B$, то и само множество B тем более плотно в X. В данном случае $\mathring{C}L_2(a, b) \subset \subset CL_2(a, b) \subset L_2(a, b)$ и $\mathring{C}L_2(a, b)$ плотно в $L_2(a, b)$. Поэтому $CL_2(a, b)$ также плотно в $L_2(a, b)$.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать, что если X — метрическое пространство $A \subset B \subset X$, множество A плотно в множестве B, а множество B плотно в пространстве X, то и множество A плотно в пространстве X.

Замечание 3. Если $RL_2(a, b)$ и $RL_2[a, b]$ — полунормированные пространства функций с интегрируемым квадратом соответственно на конечном интервале (a, b) и отрезке $[a, b]$, а $RL_2^0(a, b)$ и $RL_2^0[a, b]$ — их подпространства, состоящие из функций с нулевой полунормой, то фактор-пространства $RL_2(a, b) / RL_2^0(a, b)$ и $RL_2[a, b] / RL_2^0[a, b]$ изоморфны.

Это следует из того, что каждую функцию из пространства $RL_2(a, b)$ можно продолжить в функцию из пространства $RL_2[a, b]$, доопределив ее произвольным образом в точках $x = a$ и $x = b$.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Доказать, что функция $f(x) = 1/\sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$ не является пределом в смысле среднего квадратичного последовательности непрерывных функций.

Мы описали различные типы пространств. В анализе в основном изучаются пространства, элементами которых являются функции. Такие пространства называются *функциональными*.

Для простоты в примерах рассматривались функции одного переменного. Подобным же образом, если взять линейное пространство функций, непрерывных на замыкании некоторого измеримого по Жордану множества $G \subset \boldsymbol{R}^n$, ввести скалярное произведение по формуле $(\varphi, \psi) = \int \varphi\psi dG$ и пополнить получившееся пространство, то получим лебегово пространство, которое обозначается $L_2(G)$.

При этом можно показать, что все таким образом полученные пространства $L_2(G)$ будут сепарабельными бесконечномерными гильбертовыми пространствами.

Бесконечномерность пространства $L_2[a, b]$ будет установлена в п. 60.2, а его сепарабельность — в п. 60.3 (теорема 2).

В дальнейшем (см. п. 60.5, теорему 10) будет доказано, что все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой. Таким образом, изучив определенные свойства функций одной или многих переменных, удается из некоторых их множеств образовать пространства L_2. Однако, превратившись в точки этого пространства, функции утрачивают многие свои индивидуальные свойства. В частности, пространства L_2 неотличимы друг от друга по числу переменных, от которых зависят функции, из которых образованы эти пространства. Это, конечно, нисколько не мешает применять функциональные пространства с большим успехом как в чисто теоретических вопросах, так и в приложениях математики.

Введенные в § 57, 58 и 59 многочисленные определения будут применяться в дальнейшем для описания определенных свойств различных классов функций в привычных и наглядных геометрических терминах (пространство, точка, расстояние, вектор, базис и т. п.); они помогут установить аналогии, имеющиеся между обычными n-мерными пространствами и пространствами функций, и выяснить специфические свойства бесконечномерных функциональных пространств.

59.6. Пространства L_p

Аналогично пространству $L_2(a, b)$ для любого конечного или бесконечного промежутка с концами в точках $x = a$ и $x = b$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, можно построить полные нормированные (т. е. банаховы) пространства $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Рассмотрим полунормированное пространство $RL_p(a, b)$ функций, для которых конечен интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

с полунормой

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \tag{59.40}$$

(см. пример 7 в п. 58.3). Пусть $\widetilde{RL}_p(a, b)$ — фактор-пространство полунормированного пространства $RL_p(a, b)$ по его подпространству $RL_p^0(a, b)$, состоящему из функций с нулевой полунормой $\|\cdot\|_p$:

$$\widetilde{RL}_p(a, b) = RL_p(a, b)/RL_p^0(a, b).$$

Таким образом, элементами пространства RL_p являются классы эквивалентных функций. Функции в данном случае

называются *эквивалентными* (см. п. 59.4), если полунорма (59.40) их разности равна нулю.

Определение 7. *Пополнение пространства* $\widetilde{RL}_p(a, b)$ *называется лебеговым пространством* $L_p(a, b)$.

Пространство $L_p(a, b)$, согласно определению, является полным линейным нормированным пространством. Можно показать, что ни при каком $p \neq 2$, $1 \leqslant p < +\infty$, в пространстве $L_p(a, b)$ нельзя ввести скалярное произведение, порождающее его норму. Таким образом, пространство $L_p(a, b)$ при $p \neq 2$ является банаховым, но не гильбертовым.

Теорема 3 и замечание 2 переносятся на случай пространств L_p в том смысле, что они остаются верными, если в них степень 2 заменить на произвольную степень $p \geqslant 1$. Иначе говоря, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Пространство непрерывных финитных на интервале* (a, b) *функций плотно в лебеговом пространстве* $L_p(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ. *Лебегово пространство* $L_p(a, b)$ *является пополнением нормированного пространства непрерывных финитных на интервале* (a, b) *функций с нормой* (59.40).

Доказательство. Действительно, теорема 4 следует из аналогов лемм 9, 10 и 11, которые очевидным образом обобщаются на случай произвольного $p \geqslant 1$. Чтобы в этом убедиться достаточно в их доказательствах полунорму $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ заменить на полунорму $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$, заметить, что если на конечном интервале (ξ, η) у функции f существует интеграл от p-й степени ее абсолютной величины, то при $p \geqslant 1$ функция f абсолютно интегрируема на рассматриваемом интервале (см. лемму 3 в п. 58.3) и поэтому для нее существует такая ступенчатая финитная на этом интервале функция φ, что

$$\int_{\xi}^{\eta} |f(x) - \varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon^2}{2^p M^{p-1}},$$

где $|f(x)| \leqslant M$, $|\varphi(x)| \leqslant M$, $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\int_{\xi}^{\eta} |f(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_{\xi}^{\eta} |f(x) - \varphi(x)|(|f(x)| + |\varphi(x)|)^{p-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant (2M)^{p-1} \int_{\xi}^{\eta} |f(x) - \varphi(x)|dx < (2M)^{p-1} \frac{\varepsilon^2}{2^p M^{p-1}} = \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Отсюда и следует аналог леммы 9 для случая $p \geqslant 1$.

Если в доказательстве леммы 10 показатель степени 2 заменить на показатель степени $p \geqslant 1$, оставив все остальное без изменения, то получится доказательство аналога этой леммы $p \geqslant 1$. Если в доказательстве леммы 11 под полунормой $\|\cdot\|$ понимать полунорму $\|\cdot\|_p$, то получится доказательство аналога и этой леммы для $p \geqslant 1$. Тем самым теорема 4 доказана. □

З а м е ч а н и е 4. Если рассматривать пространство $L_p(a, b)$ как пространство, получающееся из пространства $\widetilde{RL}_p(a, b)$ конструкцией пополнения пространств, описанной в теореме 4 п. 57.5, то его элементами будут являться классы эквивалентных фундаментальных последовательностей, составленные из классов эквивалентных функций, у которых интегрируема (в несобственном смысле) p-я степень их абсолютной величины. Если при этом произвести отождествление пространств CL_p и $\widetilde{RL}_p$ с их образами в L_p, как это указывалось выше, а тем самым считать, что

$$CL_p \subset \widetilde{RL}_p \subset L_p,$$

то окажется, что пространство L_p состоит из непрерывных функций, из указанных классов эквивалентных функций, не содержащих непрерывных функций, и из «абстрактных элементов», представляющих собой классы фундаментальных последовательностей, членами которых являются те же классы эквивалентных функций. Можно, далее, условно в смысле замечания 1 «заменить» все элементы из пространства $\widetilde{RL}_p$ функциями — произвольно выбранными их представителями. Тогда пространство L_p окажется состоящим из функций с интегрируемой p-й степенью их абсолютной величины и тех же абстрактных элементов, необходимо возникающих при процессе пополнения пространства RL_p ввиду его неполноты. Эта «условная замена» элементов пространства $RL_p(a, b)$ их представителями отражает точное утверждение, что операции над классами эквивалентных функций сводятся к соответствующим операциям над их представителями в вышеуказанном смысле.

Оказывается, и это очень интересно и важно, что указанные абстрактные элементы можно рассматривать не как классы фундаментальных последовательностей классов эквивалентности, а как некоторые функции, точнее, как классы эк-

вивалентных функций, причем в случае $p = 2$ скалярное произведение для них также определяется формулой (59.11), только интегралы в этих формулах следует понимать не в смысле собственных или несобственных интегралов Римана, а в более общем смысле, в смысле так называемого интеграла Лебега. Рассмотрение этого вопроса выходит, однако, за рамки рассматриваемых методов и поэтому не будет излагаться в настоящем курсе. Его изложение можно найти, например, в учебнике: *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. I, II. 5-е изд. — М., 2003.

УПРАЖНЕНИЯ. 7. Доказать неэквивалентность понятий сходимости в среднем в смысле L_1 и в смысле L_2 для последовательности функций.

8. Доказать, что если последовательность интегрируемых на некотором отрезке функций равномерно на этом отрезке сходится к некоторой интегрируемой на нем функции, то указанная последовательность сходится в той же функции на рассматриваемом отрезке в среднем в смысле L_p, $p \geqslant 1$.

9. Построить пример последовательности непрерывных на некотором отрезке функций, сходящейся на нем к некоторой непрерывной функции в среднем в смысле L_2, но не сходящейся равномерно на этом отрезке.

10. Построить пример последовательности неотрицательных непрерывных на отрезке функций, сходящейся на нем в среднем, но не сходящейся в смысле среднего квадратичного.

§ 60
Ортонормированные базисы и разложения по ним

60.1. Ортонормированные системы

Определение 1. *Пусть X — линейное пространство с почти скалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$, в этом случае пишется также $x \perp y$.*

Определение 2. *Система элементов $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) линейного пространства X с почти скалярным произведением называется ортогональной, если каждые ее два элемента ортогональны.*

Очевидно, если система x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, ортогональна и $\|x_\alpha\| \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то ее можно «нормировать», поделив каждый элемент на его полунорму, т. е. умножив x_α на число $1/\|x_\alpha\|$, получим систему

$$\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|},\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\},$$

все элементы которой имеют полунорму, равную единице. В случае пространств со скалярным произведением такие системы называют *ортонормированными*.

Напомним, что если X — пространство со скалярным произведением, то условие $\|x\| \neq 0$ равносильно тому, что $x \neq 0$.

ЛЕММА 1. *Если система $\{x_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ элементов линейного пространства X с почти скалярным произведением ортогональна и $\|x_\alpha\| \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то она линейно независима.*

Доказательство. Пусть для некоторых элементов x_{α_k} $\alpha_k \in \mathfrak{A}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеем $\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0$. Умножим скалярно обе части этого равенства на x_{α_k}, k — фиксировано ($k = 1, 2, \ldots, n$), получим $\lambda_k(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0$, так как, в силу ортогональности системы, $(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k}) = 0$, $j \neq k$. Замечая далее, что, по предположению, $\|x_{\alpha_k}\| \neq 0$ и, следовательно, $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, получим $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Линейная независимость системы x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, доказана. □

Докажем еще одну лемму, выражающую критерий линейной независимости функций через скалярные произведения.

ЛЕММА 2. *Если для системы элементов $x_1, \ldots, x_n$ пространства X со скалярным произведением определитель*

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

равен нулю, то система линейно зависима.

Определитель $G(x_1, \ldots, x_n)$ называется *определителем Грама** данной системы.

* И. Грам (1850—1916) — датский математик.

Доказательство. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, x_i) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (60.1)$$

или

$$\lambda_1(x_1, x_i) + \ldots + \lambda_n(x_n, x_i) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определителем этой системы является транспонированный определитель Грама, который по условию леммы равен нулю. Следовательно, система (60.1) имеет нетривиальное решение $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (т. е. такое, что не все λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, равны нулю). Умножим равенство (60.1) на λ_i и просуммируем по i от 1 до n:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, что означает линейную зависимость системы $x_1, \ldots, x_n$. □

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Доказать, что если конечная система элементов предгильбертова пространства линейно зависима, то ее определитель Грама равен нулю.

2. Доказать, что если $\{\omega_x\}$ — ортонормированная система, то для любых двух ее элементов ω_α и $\omega_{\alpha'}$ имеет место равенство

$$\|\omega_{\alpha'} - \omega_\alpha\| = \sqrt{2}, \ \alpha' \neq \alpha.$$

3. Доказать, что функции $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$, $\sin 7x$, $\sin 9x$ линейно независимы.

Примеры. 1. Тригонометрическая система функций

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ldots, \ \cos nx, \ \sin nx, \ldots \qquad (60.2)$$

ортогональна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (см. п. 57.10). Это было доказано в лемме 1 п. 55.1.

Из формул (55.4) следует, что $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому ортонормированная система, соответствующая системе (60.2), имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots .$$

2. Рассмотрим многочлены Лежандра (см. п. 58.1)

$$P_0(x) = 1, \ \ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \ \ n = 1, 2, \ldots . \qquad (60.3)$$

Покажем, что система (60.3) ортогональна в пространстве $L_2[-1, 1]$. Для этого докажем более общее утверждение, а именно что многочлен Лежандра $P_n(x)$ ортогонален любому многочлену

$Q_m(x)$ степени $m < n$. Заметив предварительно, что выражение $\frac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, обращается в нуль в точках $x = -1$ и $x = 1$, имеем, последовательно интегрируя по частям,

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = Q_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Bigg|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1} Q_m'(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}dx = \ldots = (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\,dx =$$

$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Таким образом, $\int\limits_{-1}^{1} Q_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m < n.$

В частности,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Подсчитаем теперь норму многочленов Лежандра. Заметив, что

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}\,x^n + Q_{n-1}(x),$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, и использовав ортогональность $P_n(x)$ ко всем многочленам меньшей степени, получим

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x)\left[\frac{(2n-1)!!}{n!}\,x^n + Q_{n-1}(x)\right]dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)x^n dx = \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,x^n dx.$$

Интегрируя последовательно по частям, продифференцировав $(x^2-1)^n$ и снова интегрируя по частям, будем иметь

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^n d\frac{d^{(n-1)}(x^2-1)^n}{d^{(n-1)}x} = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{-1}^{1} x\,d(x^2-1)^n =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}x^2dx =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!1}{(2n-2)!!3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}dx^3 =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n-1)!!1}{(2n-4)!!3} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-2} x^4 dx = \ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n} dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Система многочленов Лежандра, как и всякая ортогональная система ненулевых элементов, линейно независима (см. лемму 1) в пространстве $L_2[-1, 1]$.

Впрочем, как это было показано раньше, они линейно независимы и вообще на любом промежутке числовой оси, не вырождающемся в точку (см. п. 58.1).

Из линейной независимости полиномов Лежандра следует, что любой многочлен степени, не большей n, является линейной комбинацией полиномов Лежандра $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... , $P_n(x)$. Действительно, в $(n + 1)$-мерном пространстве многочленов степеней, не превышающих n, любая система $n + 1$ линейно независимых многочленов, в частности указанная система полиномов Лежандра, образует базис. Поэтому всякий многочлен рассматриваемой степени является линейной комбинацией элементов указанной системы.

3. Система функций $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$. В самом деле

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, \overline{e^{imx}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx.$$

Отсюда, вспоминая, что период функции e^x равен $2\pi i$ (см. п. 37.6), при $n \neq m$ получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, \overline{e^{imx}}\, dx = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что последовательность функций $\sin (2n-1)\frac{x}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует ортогональную систему на отрезке $[0, \pi]$.

60.2. Ортогонализация

Пусть снова X — предгильбертово пространство. Рассмотрим следующую задачу. Пусть дана линейно независимая счетная система элементов x_n, $n = 1, 2, \ldots$, пространства X. Требуется с помощью конечных линейных комбинаций получить из нее ортогональную систему. Оказывается, эта задача всегда имеет решение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$x_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{60.4}$$

— линейно независимая система элементов пространства X. *Тогда существует ортогональная система элементов* y_n, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *этого пространства такая, что каждый ее элемент* y_n, $n = 1, 2, \ldots$, *является линейной комбинацией первых* n *элементов системы* (60.4):

$$y_n = \alpha_{n,1}\, x_1 + \alpha_{n,2}\, x_2 + \ldots + \alpha_{n,n}\, x_n. \tag{60.5}$$

Построение ортогональной системы $\{y_n\}$ вида (60.5) из линейно независимой системы $\{x_n\}$ называется обычно *процессом ортогонализации системы* $\{x_n\}$.

Доказательство. Положим $y_1 = x_1$. Так как система (60.4) линейно независима, то $y_1 \neq 0$ (почему?).

Пусть существуют попарно ортогональные элементы $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, удовлетворяющие условию (60.5). Будем искать элемент y_{k+1}, ортогональный всем $y_1, \ldots, y_k$, в виде

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1}\, y_1 + \ldots + \beta_{k+1,k}\, y_k - x_{k+1}. \tag{60.6}$$

Из условий ортогональности

$$(y_1, y_{k+1}) = \ldots = (y_k, y_{k+1}) = 0 \tag{60.7}$$

получаем

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \ldots, (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1}). \tag{60.8}$$

Отсюда однозначно определяются коэффициенты $\beta_{k+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Элемент y_{k+1}, задаваемый представлением (60.6) с найденными коэффициентами $\beta_{k+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, т. е.

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(y_i, x_{k+1})}{(y_i, y_i)}\, y_i - x_{k+1},$$

удовлетворяет условиям (60.7).

Подставим в (60.6) выражения для y_n, $n = 1, 2, \ldots, k$, записанные в виде (60.5); после приведения подобных членов получим

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k - x_{k+1}. \tag{60.9}$$

Отсюда следует, что $y_{k+1} \neq 0$, так как в противном случае элементы $x_1, \ldots, x_{k+1}$ оказались бы линейно зависимыми. □

З а м е ч а н и е. Отметим, что если какая-либо ортогональная система элементов z_n, $z_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, пространства X такова, что каждый элемент z_n также является линейной комбинацией первых n элементов системы (60.4):

$$z_n = \gamma_{n,1}x_1 + \ldots + \gamma_{n,n}x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{60.10}$$

то элемент z_n отличается от элемента y_n лишь некоторым числовым множителем $\lambda_n \neq 0$:

$$z_n = \lambda_n y_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Докажем это. Обозначим через $L(u_1, \ldots, u_n)$ линейную оболочку системы элементов $u_1, \ldots, u_n$ (см. п. 58.1); $L(x_1, \ldots, x_n)$ является n-мерным пространством, в котором линейно независимые элементы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис (см. п. 58.1). Элементы y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (соответственно z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$), линейно независимы и содержатся в $L(x_1, \ldots, x_n)$; следовательно, элементы y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и элементы z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, также образуют базис в пространстве $L(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, $L(x_1, \ldots, x_n) = L(y_1, \ldots, y_n) = L(z_1, \ldots, z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Элемент $y_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогонален подпространству $L(y_1, \ldots, y_{n-1}) = L(x_1, \ldots, x_{n-1})$, т. е. ортогонален каждому элементу этого подпространства. Элемент же $z_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогонален подпространству $L(z_1, \ldots, z_{n-1}) = L(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Итак, элементы y_n и z_n n-мерного пространства $L(x_1, \ldots, x_n)$ ортогональны одному и тому же $(n-1)$-мерному подпространству $L(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и, следовательно, пропорциональны: $z_n = \lambda_n y_n$, $\lambda \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (почему?).

Отметим еще, что из

$$L(x_1, \ldots, x_n) = L(y_1, \ldots, y_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

вытекает совпадение линейных оболочек бесконечных систем (60.4) и (60.5).

Рассмотрим теперь систему степеней x:

$$1, \ x, \ x^2, \ \ldots, \ x^n, \ldots . \tag{60.11}$$

В п. 58.1 было показано, что эта система линейно независима на любом промежутке числовой оси, не вырождающемся в точку, и так как входящие в нее функции, рассматриваемые на некотором отрезке $[a, b]$, принадлежат пространствам $C(a, b)$

(см. пример 6 в п. 58.3), $CL_2[a, b]$ и $L_2[a, b]$ (см. п. 59.4), то в этих пространствах имеются бесконечные линейно независимые системы. Следовательно, указанные пространства бесконечномерны, т. е. заведомо не имеют базиса, состоящего из конечного числа элементов.

Если систему (60.11) взять на отрезке $[-1, 1]$ в качестве исходной системы (60.4) и применить к ней процесс ортогонализации (см. (60.5)) в пространстве $L_2[-1, 1]$, то получим последовательность ортогональных многочленов соответственно степеней 0, 1, 2, ... Из сделанного выше замечания следует, что эти многочлены могут отличаться от многочленов Лежандра (60.3), которые также ортогональны, лишь постоянными множителями.

60.3. Полные системы. Полнота тригонометрической системы и системы полиномов Лежандра

Напомним (см. п. 58.5), что система элементов $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называется *полной в полунормированном пространстве* X, если множество всех конечных линейных комбинаций ее элементов плотно в пространстве X в смысле заданной в нем полунормы. Иначе говоря, система полна, если для каждого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_k} \in \Omega$ и числа λ_k, $k = 1, 2, \dots, m$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\| < \varepsilon.$$

Определение 3. *Полунормированное пространство* X *называется вложенным в полунормированное пространство* Y, *если*:

1^0. $X \subset Y$.

2^0. *Существует такая постоянная* $c > 0$, *что для любого* $x \in X$ *имеет место неравенство*

$$\|x\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X. \tag{60.12}$$

Постоянная $c > 0$ называется *константой вложения*. Вложение пространства X в пространство Y обозначается символом

$$X \Subset Y.$$

Легко проверить, что если $X \Subset Y$ и $Y \Subset Z$, то $X \Subset Z$.

Примеры. 4. Простейшим примером вложения является случай, когда полунорма пространства X является сужением полунормы пространства Y на его подмножество X, т. е. когда $\|x\|_X = \|x\|_Y$ для всех $x \in X$. В этом случае вложение $X \Subset Y$ означает просто включение $X \subset Y$, а константа вложения равна единице: $c = 1$. Примером таких вложений для пространств функций, заданных на конечном отрезке $[a, b]$, являются следующие включения нормированных пространств (см. пример 6 в п. 58.3)

$$\overset{\circ}{C}[a, b] \subset C[a, b] \subset B[a, b],$$

где $\overset{\circ}{C}[a, b]$ — пространство финитных на интервале (a, b) функций с нормой пространства $C[a, b]$, а также (см. п. 59.4)

$$\overset{\circ}{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset L_2[a, b].$$

Примером подобного вложения в полунормированное пространство является включение

$$CL_p[a, b] \subset RL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty.$$

5. Из неравенства

$$\|f\|_1 \leqslant (b - a)^{1/q}\|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(см. лемму 3 в п. 58.3) следует, что имеет место вложение (для полунормированных пространств)

$$RL_p[a, b] \Subset RL_1[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

следовательно, и для их подпространств

$$CL_p[a, b] \Subset CL_1[a, b]$$

(которые являются уже нормированными пространствами).

В первом вложении пространства $X = RL_p[a, b]$ и $Y = RL_1[a, b]$ не совпадают как множества: имеет место строгое включение $X \subset Y$, а во втором — пространства $X = CL_p[a, b]$ и $Y = CL_1[a, b]$ совпадают как множества: $X = Y$, так как они состоят из одних и тех же функций, а именно функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, однако эти функции нормируются разными способами в пространствах $CL_p[a, b]$ и $CL_1[a, b]$.

6. Из неравенства

$$\|f\|_p \leqslant (b - a)^{1/p}\|f\|_\infty$$

(см. снова лемму 3 в п. 58.3) следует, что справедливо вложение

$$B[a, b] \cap RL_p[a, b] \Subset RL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty.$$

Здесь пространство $B[a, b] \cap RL_p[a, b]$ рассматривается с нормой $\|\cdot\|_\infty$, т. е. с нормой пространства $B[a, b]$. Если ограничиться только одними непрерывными функциями, то из этого вложения следует вложение

$$C[a, b] \Subset CL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty. \tag{60.13}$$

Отсюда, вспоминая, что пространство $CL_p[a, b]$ изометрически вкладывается в пространство $L_p[a, b]$ (см. п. 59.6), получаем еще вложение

$$C[a, b] \Subset L_p[a, b]. \tag{60.14}$$

Обратим внимание на то, что во вложениях (60.13) и (60.14) вкладываемые пространства плотны в пространствах, в которые они вкладываются: в случае (60.13) это следует просто из того, что множества точек обоих пространств совпадают, а в случае (60.14) это следует из теоремы 4 п. 59.6.

ЛЕММА 3. *Если система $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, полна в полунормированном пространстве X, пространство X вложено в полунормированное пространство Y и множество X плотно в пространстве Y по полунорме этого пространства, то система Ω полна в пространстве Y.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $y \in Y$ и любое $\varepsilon > 0$. В силу плотности множества X в пространстве Y, найдется такой элемент $x \in X$, что

$$\|y - x\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку система Ω полна в пространстве X, существует конечное множество таких элементов $x_{\alpha_k} \in \Omega$ и чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2c},$$

где $c > 0$ — константа вложения $X \Subset Y$. В силу этого вложения (см. определение 3),

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y \underset{(60.12)}{\leqslant} c \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для первоначально выбранного нами элемента y получим

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y \leqslant \left\| y - x \right\|_Y + \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает плотность системы Ω в пространстве Y. □

Примеры. 1. Система степеней

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \qquad (60.15)$$

полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_p[a, b]$, $1 \leqslant p < +\infty$, и $L_p[a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$. Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса (см. теорему 8 в п. 55.8), указанная система степеней полна в пространстве $C[a, b]$, которое вложено в пространство $L_p[a, b]$ и плотно в нем. Поэтому по лемме 3 этого пункта система степеней (60.15) полна в пространстве $L_2[a, b]$.

Обратим внимание на то, что всякий базис в линейном нормированном пространстве является, очевидно, полной линейно независимой системой. Обратное неверно. Например, система степеней (60.15) хотя и образует полную линейно независимую систему в банаховом пространстве $C[a, b]$, однако не является в нем базисом: если в пространстве $C[a, b]$ некоторая функция f раскладывается по системе степеней (58.15), т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

то это означает, что написанный степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, и, следовательно, функция аналитическая на интервале $[a, b]$. Поэтому заведомо любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция не может быть представлена в указанном виде.

2. Система полиномов Лежандра (см. (60.3))

$$P_0(x) = 1,\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_p[a, b]$, $1 \leqslant p < +\infty$, и $L_p[a, b]$, $1 \leqslant p < +\infty$, для любого отрезка $[a, b]$. Это сразу следует из того, что любой многочлен $Q(x)$ является линейной комбинацией полиномов Лежандра (см. п. 58.1):

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x). \qquad (60.16)$$

Поэтому если в каком-то полунормированном пространстве X полна система степеней (60.15), т. е. для любого элемента $f \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $Q = Q(x)$, что $\|f - Q\| < \varepsilon$, то, в силу (60.16),

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k \right\| < \varepsilon.$$

Это и означает полноту системы полиномов Лежандра в пространстве X.

3. Обозначим через $C^*[-\pi, \pi]$ подпространство пространства непрерывных функций $C[-\pi, \pi]$, состоящее из функций, принимающих на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ одинаковые значения:

$$f(-\pi) = f(\pi). \tag{60.17}$$

Тригонометрическая система (60.2)

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \ldots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad \ldots,$$

полна в пространствах $C^*[-\pi, \pi]$ и $L_p[-\pi, \pi]$. Полнота тригонометрической системы в пространстве $C^*[-\pi, \pi]$ была доказана раньше: см. теорему 7′ в п. 55.8. Докажем ее полноту в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$.

Обозначим через $\overset{\circ}{C}[-\pi, \pi]$ подпространство пространства $C^*[-\pi, \pi]$, состоящее из функций f, финитных на интервале (a, b). Согласно теореме 4 в п. 59.6, множество $\overset{\circ}{C}[-\pi, \pi]$, а следовательно, и пространство $C^*[-\pi, \pi] \supset \overset{\circ}{C}[-\pi, \pi]$, плотно в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$. Поэтому, в силу вложения (см. (60.14))

$$C^*[-\pi, \pi] \Subset L_p[-\pi, \pi]$$

и леммы 3 этого пункта, тригонометрическая система (60.2) полна в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$.

Отметим, что поскольку условие (60.17) сохраняется при равномерной сходимости и каждый тригонометрический многочлен ему удовлетворяет, то тригонометрическая система заведомо не полна в пространстве $C[-\pi, \pi]$, так как в нем заведомо есть функции, не удовлетворяющие условию (60.17).

Из рассмотренных примеров как простое следствие вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Банахово пространство $C[a, b]$ и банахово пространство $L_p[a, b]$ являются сепарабельными пространствами.*

Действительно, сепарабельность пространств означает (см. определение 22 в п. 58.5) наличие в нем счетной полной системы. В указанных пространствах таковой системой является, например, система (60.15) целых неотрицательных степеней переменной x.

60.4. Ряды Фурье

Пусть, как и раньше, X — линейное пространство со скалярным произведением. Рассмотрим следующую задачу. Пусть задана система n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства X и фиксирован некоторый вектор $x \in X$. Требуется найти линейную комбинацию вида

$$\sigma_n = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n,$$

которая дает наилучшее приближение в пространстве X элемента x, т. е. осуществляет минимум выражения

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\|, \tag{60.18}$$

или, что то же, минимум функции

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k,\ x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right)$$

от переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Геометрически это означает, что в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n = L(e_1, \dots, e_n)$, натянутом на векторы $e_1 \in X, \dots, e_n \in X$, ищется элемент, наименее удаленный от заданного элемента $x \in X$.

Если пространство X — n-мерное и, следовательно, векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис, то всегда можно подобрать такие коэффициенты a_k, $k = 1, 2, \dots, n$, что будет выполняться равенство

$$x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \tag{60.19}$$

и, следовательно, выражение (60.18) обратится в нуль. Если же X не конечномерно, или конечномерно, но имеет размерность, бóльшую чем n, то равенство (60.19), вообще говоря, осуществить невозможно и задача состоит в отыскании линейной комбинации $s_n = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, дающей минимальное значение выражению (60.18).

Мы покажем, что сформулированная задача всегда имеет и притом единственное решение s_n, кроме того, выясним некоторые свойства этого решения (на рис. 16 схематически изображена рассматриваемая задача). Применяя, если надо, процесс ортогонализации (см. п. 60.2), систему $e_1, \dots, e_n$ всегда можно заменить ортогональной системой не равных нулю векторов.

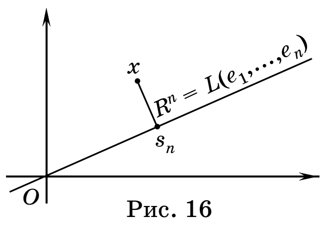


Рис. 16

Для краткости изложения рассмотрим сразу бесконечномерное пространство. Решение поставленной задачи для конечномерного пространства будет следовать из полученных результатов.

Итак, пусть X — линейное пространство со скалярным произведением и

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \tag{60.20}$$

— некоторая ортогональная система его элементов.

Будем всегда предполагать, что $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Если $x \in X$ и

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{60.21}$$

то

$$a_n = \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}. \tag{60.22}$$

Действительно, умножив обе части равенства (60.21) на элемент e_m, в силу непрерывности скалярного произведения (см. лемму 4 п. 59.3) и условия ортогональности системы (60.20)

$$(e_n, e_m) = 0, \quad n \neq m, \tag{60.23}$$

получим

$$(x, e_m) \underset{(60.21)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e_n, e_m) \underset{(60.23)}{=} a_m(a_m, e_m).$$

Найдя отсюда a_m, получим формулу (60.22).

Из доказанного следует, что если существует разложение элемента $x \in X$ в ряд (60.21), то оно единственно, так как его коэффициенты однозначно определяются формулами (60.22).

Определение 4. *Если $x \in X$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{60.24}$$

с коэффициентами a_n, задаваемыми формулами (60.22), *называется рядом Фурье, сами эти коэффициенты — коэффициентами Фурье, а частичные суммы ряда* (60.24)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{60.25}$$

— суммами Фурье порядка n элемента x по заданной ортогональной системе (60.20).

В этом случае пишут

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Если $\|e_n\| = 1$, то

$$a_n \underset{(60.22)}{=} (x, e_n) = \|x\| \cos \widehat{x e_n},$$

т. е. в этом случае коэффициент Фурье a_n равен величине проекции вектора x на прямую $y = te_n$, $-\infty < t < +\infty$.

Нашей ближайшей задачей является выяснение условий, при которых ряд Фурье элемента x сходится, и условий, когда сумма его равна x.

Предварительно установим некоторые свойства рядов Фурье по ортогональным системам. Попутно будет решена и задача, поставленная в начале этого пункта.

ЛЕММА 4. *Элемент*

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k,\ \lambda_k \in \boldsymbol{R},\quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{60.26}$$

является суммой Фурье порядка n элемента $x \in X$ тогда и только тогда, когда

$$(x - \sigma_n, e_m) = 0,\quad m = 1, 2, \dots, n. \tag{60.27}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого элемента σ_n вида* (60.26) *имеет место равенство*

$$(x - s_n, \sigma_n) = 0, \tag{60.28}$$

т. е. элемент $x - s_n$ ортогонален линейной оболочке $L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$: $x - s_n \perp L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ (см. рис. 16).

Доказательство. Имеем

$$(x - \sigma_n, e_m) = (x, e_m) - (\sigma_n, e_m) \underset{(60.26)}{=} (x, e_m) - \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, e_m \right) =$$

$$= (x, e_m) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_k, e_m) \underset{(60.23)}{=} (x, e_m) - \lambda_m (e_m, e_m).$$

Поэтому условие (60.27) равносильно условию

$$(x, e_m) - \lambda_m (e_m, e_m) = 0.$$

А это означает, согласно (60.22), что числа

$$\lambda_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)},\quad m = 1, 2, \dots, n,$$

являются коэффициентами Фурье элемента x.

Докажем следствие: в силу (60.27), выполняется равенство $(x - s_n, e_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, поэтому

$$(x - s_n, \sigma_n) \underset{(60.26)}{=} \left(x - s_n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x - s_n, e_k) \underset{(60.27)}{=} 0. \ \square$$

Если вектор x не принадлежит линейной оболочке $L(e_1, \quad e_2, \dots, e_n)$ векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, то геометрический смысл леммы 4 состоит в том, что вектор $x - s_n$ является единственным перпендикуляром к подпространству $L(e_1, e_2, \dots, e_n)$, проходящим через точку $x \notin L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ (см. рис. 16).

ТЕОРЕМА 3 (минимальное свойство сумм Фурье). *Если s_n — сумма Фурье порядка n элемента $x \in X$, то для любого элемента σ_n вида* (60.26) *имеет место неравенство*

$$\|x - s_n\| \leqslant \|x - \sigma_n\|$$

и элемент s_n является единственным элементом вида (60.26), *удовлетворяющим этому условию.*

Таким образом,

$$\|x - s_n\| = \min_{\sigma_n} \|x - \sigma_n\|. \qquad (60.29)$$

Кроме того, если $\|x - s_n\| = \|x - \sigma_n\|$, то $\sigma_n = s_n$.

СЛЕДСТВИЕ. *Последовательность $\{\|x - s_n\|\}$ является убывающей последовательностью*:

$$\|x - s_{n+1}\| \leqslant \|x - s_n\|, \quad n = 1, 2, \dots . \qquad (60.30)$$

Доказательство. Для любого элемента σ_n вида (60.26) имеем

$$\|x - \sigma_n\|^2 = (x - \sigma_n, x - \sigma_n) = ((x - s_n) + (s_n - \sigma_n), (x - s_n) + (s_n - \sigma_n)) =$$
$$= (x - s_n, x - s_n) + (s_n - \sigma_n, x - s_n) + (x - s_n, s_n - \sigma_n) +$$
$$+ (s_n - \sigma_n, s_n - \sigma_n) = \|x - s_n\|^2 + \|s_n - \sigma_n\|^2, \qquad (60.31)$$

так как $s_n - \sigma_n \in L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ и поэтому

$$(s_n - \sigma_n, x - s_n) = (x - s_n, s_n - \sigma_n) \underset{(60.28)}{=} 0.$$

Поскольку $\|s_n - \sigma_n\|^2 \geqslant 0$, из равенства (60.31) следует, что

$$\|x - s_n\| \leqslant \|x - \sigma_n\|, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Кроме того, если $\|x - \sigma_n\| = \|x - s_n\|$, то из того же равенства вытекает, что $\|s_n - \sigma_n\| = 0$. Поэтому, в силу свойства нормы, в этом случае имеем $\sigma_n = s_n$. Теорема доказана.

Докажем следствие. Заметив, что всякая линейная комбинация σ_n элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ может также рассматриваться и как линейная комбинация σ_{n+1} элементов $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$

с коэффициентом при e_{n+1}, равным нулю, получим, в силу минимального свойства (60.29) сумм Фурье,

$$\|x - s_{n+1}\| = \min_{\sigma_{n+1}} \|x - \sigma_{n+1}\| \leqslant \min_{\sigma_n} \|x - \sigma_n\| = \|x - s_n\|. \square$$

Равенство (60.29) означает, что сумма Фурье s_n элемента x является его *наилучшим приближением в пространстве* $L(e_1, e_2, \dots, e_n)$, т. е. в линейной оболочке элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$. Тем самым решена сформулированная в начале этого пункта задача о наилучшем приближении элемента пространства в конечномерном подпространстве: таким приближением является соответствующая сумма Фурье данного элемента.

Геометрический смысл теоремы 3 состоит в том, что перпендикуляр $x - s_n$ к подпространству $L(e_1, e_2, \dots, e_n)$, проходящий через точку $x \notin L(e_1, e_2, \dots, e_n)$, имеет минимальную длину (норму) по сравнению с длинами всех векторов, соединяющих точки $\sigma_n \in L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ с точкой x (см. рис. 16) — свойство хорошо известное из элементарной математики для трехмерного пространства.

ЛЕММА 5. *Для любого элемента $x \in X$ имеет место равенство*

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Доказательство. В самом деле, заметив, что из формул (60.22) следует, что

$$(x, e_k) = a_k(e_k, e_k), \quad k = 1, 2, \dots ,$$

получим

$$\|x - s_n\|^2 = (x - s_n, x - s_n) \underset{(60.25)}{=} (x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, x - \sum_{m=1}^{n} a_m e_m) =$$

$$= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(e_k, x) - \sum_{m=1}^{n} a_m(x, e_m) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_k a_m(e_k e_m) \underset{(60.23)}{=}$$

$$= (x, x) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2(e_k, e_k) \underset{(60.22)}{=}$$

$$= (x, x) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2(e_k, e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2(e_k, e_k) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2. \square$$

ТЕОРЕМА 4. *Для любого элемента $x \in X$ для его коэффициентов Фурье по любой ортогональной системе* (60.20) *выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2, \tag{60.32}$$

в частности, для ортонормированной системы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Неравенство (60.32) называется *неравенством Бесселя.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если для ортогональной системы* (60.20) *существует такая постоянная* $c > 0$, *что для всех* $n = 1, 2, \ldots$, *выполняется неравенство*

$$\|e_n\| \geqslant c, \tag{60.33}$$

то для любого элемента $x \in X$ *его коэффициенты Фурье стремятся к нулю при* $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Поскольку $\|x - s_n\|^2 \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, из леммы 5 следует, что

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Перейдя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$ (это возможно, так как $a_k^2 \ \|e_k\|^2 \geqslant 0$ и, следовательно, последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \ \|e_k\|^2 \geqslant 0$ возрастает), получим

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует неравенство (60.32).

Докажем следствие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 c^2 \underset{(60.33)}{\leqslant} \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \underset{(60.32)}{\leqslant} \frac{1}{c^2} \|x\|^2.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится и, следовательно, его общий член стремится к нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n^2 = 0$, а это равносильно тому, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. □

Естественно возникает вопрос: при каких условиях ряд Фурье элемента x сходится?

ТЕОРЕМА 5. *Если пространство* X *гильбертово* (*т. е. полно*), *то ряд Фурье* (60.24) *любого элемента* $x \in X$ *по любой ортогональной системе* (60.20) *сходится в пространстве* X. *Если* x_0 *его сумма*:

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{60.34}$$

то элемент $x - x_0$ ортогонален ко всем элементам системы (60.20).

Доказательство. Пусть $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, $n = 1, 2, \dots,$ — частичные суммы ряда Фурье (60.24) элемента x по системе (60.20); тогда

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2, \; n = 1, 2, \dots, p = 1, 2, \dots . \qquad (60.35)$$

В силу неравенства Бесселя (60.32), ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2$$

сходится, следовательно, в силу критерия Коши для сходимости числового ряда, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при $n > n_\varepsilon$ и $p > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon^2,$$

поэтому, согласно равенству (60.35) при $n > n_e$ и $p > 0$, имеем

$$\|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{s_n\}$ является фундаментальной в пространстве X и вследствие полноты последнего сходится.

В условиях теоремы последовательность s_n сходится, вообще говоря, не к элементу x. Пусть ее пределом является элемент x_0, т. е.

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Согласно лемме 4, для любого элемента e_k при $n \geqslant k$ имеет место равенство $(x - s_n, e_k) = 0$. Поэтому, в силу непрерывности скалярного произведения (см. п. 59.3), имеем

$$(x - x_0, e_k) = (x - \lim_{n \to \infty} s_n, e_k) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (x - s_n, e_k) = 0. \; \square$$

Что же касается условия сходимости ряда Фурье некоторого отдельного элемента к самому этому элементу, то его можно сформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 6. *Ряд Фурье* (60.24) *элемента x линейного пространства со скалярным произведением сходится к этому элементу тогда и только тогда, когда для него выполняется равенство*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2, \tag{60.36}$$

где a_n — коэффициенты Фурье элемента x по системе (60.27).

Равенство (60.36) называется *равенством Парсеваля—Стеклова**.

В случае, когда система (60.20) ортонормирована, равенство Парсеваля принимает более простой вид

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad a_n = (x, e_n), \quad n = 1, 2, \dots ,$$

и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на бесконечномерные пространства.

Доказательство теоремы 5. Мы имели (см. лемму 5)

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим эквивалентность условия

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0 \tag{60.37}$$

и условия

$$\lim_{n \to \infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2\right) = 0,$$

т. е. условия

$$\|x\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2. \square \tag{60.38}$$

Напомним теперь понятие полной системы (см. п. 58.5) применительно только к случаю счетных систем. Система $\{e_n\}$ элементов $e_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, называется полной, если множество конечных линейных комбинаций элементов этой системы плотно в пространстве X. Это означает, что для каждого элемента X и каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют такой номер $n = n(\varepsilon, x)$ и такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что выполняется неравенство

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{60.39}$$

Полнота ортонормированной системы является условием, обеспечивающим сходимость ряда Фурье любого элемента пространства к самому этому элементу. Сформулируем это условие в виде теоремы.

* В. А. Стеклов (1864—1926) — русский математик.

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы в линейном пространстве со скалярным произведением каждый элемент был бы суммой своего ряда Фурье по заданной ортогональной системе, необходимо и достаточно, чтобы эта система была полной.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для того чтобы ортогональная система была полной в линейном пространстве со скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента пространства выполнялось равенство Парсеваля относительно этой системы.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если все коэффициенты Фурье некоторого элемента пространства со скалярным произведением по полной ортогональной системе равны нулю, то и сам этот элемент равен нулю.*

Доказательство теоремы 7. Пусть X — линейное пространство со скалярным произведением и система (60.20) является ортогональной системой этого пространства. Если для любого X его ряд Фурье по системе (60.20) сходится к x, т. е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad \text{где } a_n = \frac{(x,\, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{60.40}$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0. \tag{60.41}$$

Следовательно, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такая частичная сумма $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ ряда Фурье (60.24), что

$$\|x - s_n\| < \varepsilon, \tag{60.42}$$

т. е. выполняется условие (60.39), если в качестве коэффициентов λ_k взять коэффициенты Фурье a_k, $k = 1, 2, \dots, n$.

Обратно, если условие (60.39) выполняется при каких-то коэффициентах $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то оно заведомо выполняется согласно теореме 3 и в случае, если взять $\lambda_1 = a_1, \dots, \lambda_n = a_n$, т. е. в этом случае для заданного $\varepsilon > 0$ выполняется условие (60.42) при некотором n, а значит, и при всех $m > n$ (см. (60.30)), а это равносильно выполнению условия (60.41). □

Следствие 1 из теоремы 7 непосредственно вытекает из самой этой теоремы и теоремы 6. Докажем следствие 2. Если $\{e_n\}$ — полная ортогональная система в пространстве X, то, согласно теореме 7, для любого элемента $x \in X$ его ряд Фурье сходится к самому этому элементу, т. е. имеет место равенство $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Поэтому если все $a_n = 0$, то и $x = 0$.

Из доказанного очевидным образом следует, что два элемента линейного пространства со скалярным произведением равны тогда и только тогда, когда они имеют равные коэффициенты Фурье по некоторой полной ортогональной системе.

Итак, если в предгильбертовом пространстве имеется полная ортогональная система, то всякий элемент этого пространства раскладывается в ряд по этой системе (теорема 6), и притом единственным образом, согласно сделанному замечанию. Иначе говоря (см. определение 24 в п. 58.5), *всякая полная ортогональная система* $\{e_n\}$, $e_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, *в частности всякая полная ортонормированная система предгильбертова пространства, является его базисом.*

Например, согласно результатам п. 60.3, полиномы Лежандра (60.3) образуют базис в гильбертовом пространстве $L_2\,[-1, 1]$, а тригонометрическая система (60.2) — базис в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Рассмотрим теперь еще один подход к понятию полноты ортогональной системы в полном пространстве.

Определение 6. *Ортогональная система* (60.27) *называется замкнутой, если в пространстве* X *не существует элемента, отличного от нуля и ортогонального каждому из элементов этой системы.*

ТЕОРЕМА 8. *Если пространство* X *гильбертово* (*т. е. полное*), *то ортогональная система* (58.20) *полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. Если система (60.20) полная, $x \in X$ и x ортогонален всем элементам системы (60.20), то все его коэффициенты Фурье по системе (60.20) равны нулю (см. (60.22)); следовательно (теорема 7), $x = 0$.

Обратно: пусть система (60.20) замкнутая, $x \in X$ и $x \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Согласно теореме 4, ряд Фурье элемента x сходится, и если $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, то $x - x_0 \perp e_n$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому, в силу замкнутости системы (60.20), $x - x_0 = 0$, т. е. $x = x_0$ и, следовательно, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Так как x — произвольный элемент пространства x, то отсюда, в силу теоремы 6, и следует полнота системы (60.20). □

Задача 6. Выяснить, эквивалентны или нет понятие полной ортогональной системы и понятие замкнутой ортогональной системы во всяком предгильбертовом пространстве.

60.5. Существование базиса в сепарабельных гильбертовых пространствах. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств

ТЕОРЕМА 9. *Во всяком сепарабельном линейном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.*

Доказательство. В том случае, когда пространство X n-мерное, теорема очевидна (см. п. 35.4), поэтому будем рассматривать только случай, когда пространство X бесконечномерно. Поскольку пространство X сепарабельно, то в нем существует последовательность элементов

$$\varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

образующих полную систему. Отбрасывая последовательно те из элементов, которые являются линейной комбинацией остальных, получим последовательность элементов ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеющих ту же линейную оболочку, что и исходная система $\{\varphi_n\}$, и линейно независимых (почему?). Применив к полученной системе процесс ортогонализации (см. п. 60.2) и нормирования (см. п. 60.1), получим ортонормированную систему e_k, $\|e_k\| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, имеющую ту же линейную оболочку, что и система $\{\psi_n\}$, а значит, ту же, что и система $\{\varphi_n\}$. Поскольку в силу полноты системы $\{\varphi_n\}$ эта линейная оболочка плотна в X, то система $\{e_n\}$ полная. В предыдущем же пункте (см. замечание после теоремы 7) было показано, что всякая полная ортонормированная система элементов предгильбертова пространства является его базисом. □

ТЕОРЕМА 10. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны между собой*.*

Предварительно докажем две леммы. Первая из них обобщает равенство Парсеваля (60.36).

ЛЕММА 6. *Пусть X — предгильбертово пространство, e_n ($e_n \neq 0$), $n = 1, 2, \ldots$, — полная ортогональная система в X, $x \in X$, $y \in X$, и пусть*

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad y \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n;$$

---

* Определение бесконечномерности пространства см. в п. 58.1, а изоморфизма пространств — в п. 59.3 (определение 3).

тогда

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \, \|e_n\|^2, \qquad (60.43)$$

в частности, если дополнительно предположить, что $\|e_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *то*

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Формула (60.43) обобщает, очевидно, формулу для скалярного произведения в конечномерном пространстве (см. п. 35.4).

Доказательство. По определению коэффициентов Фурье,

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \; b_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2};$$

поэтому имеем

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \, y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} b_k (x, e_k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} a_k (y, e_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k (e_k, e_k) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2. \qquad (60.44)$$

Из полноты системы e_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = 0, \; \lim_{n \to \infty} \left(y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = 0,$$

поэтому, в силу непрерывности скалярного произведения, при $n \to \infty$ левая часть равенства (60.44) стремится к нулю, следовательно, это имеет место и для правой части, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \, \|e_k\|^2 = (x, y).$$

Это равносильно равенству (60.43). □

ЛЕММА 7. *Пусть X — гильбертово пространство, e_k, $k = 1, 2, \ldots$, — ортонормированный базис в X и a_k, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность чисел таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходится. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ сходится в пространстве X, и если $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, то a_k, $k = 1, 2, \ldots$, — коэффициенты Фурье элемента x.*

Доказательство. Если $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, то

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2,$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

и, в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, он удовлетворяет критерию Коши для сходящихся рядов. Отсюда следует, что последовательность $\{s_n\}$ является фундаментальной в пространстве X и, следовательно, сходится.

Пусть $x = \lim_{n \to \infty} s_n$, т. е. $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$; тогда, в силу единственности разложения элемента пространства по базису (см. замечание к теореме 7), $(x, e_n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. a_n коэффициенты Фурье элемента x. □

Доказательство теоремы 10. Пусть X и Y — два сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространства. Согласно теореме 9, в них существуют ортонормированные базисы, соответственно e_n, $n = 1, 2, \ldots$, и f_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $x \in X$ и $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$; тогда a_n — коэффициент Фурье элемента x и, следовательно, по равенству Парсеваля, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Положим $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Согласно лемме 5, это имеет смысл.

Отображение пространства X в пространство Y, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ указанный элемент $y \in Y$, и осуществляет изоморфизм этих пространств. Действительно, при этом соответствии, в силу единственности разложения элемента по базису, разным элементам пространства X соответствуют разные элементы пространства Y.

Далее, всякий элемент пространства Y поставлен в соответствие некоторому элементу пространства X (т. е. указанное отображение является отображением на пространство Y); в самом деле, если $y \in Y$, то, разложив его в Y по базису, получим

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n.$$

Пусть $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ (такой элемент существует, так как написанный ряд сходится, см. лемму 7). Очевидно, что элементу x и соответствует при установленном соответствии элемент y. Покажем, наконец, что при этом соответствии сохраняется скалярное произведение. Это сразу следует из леммы 4. Действительно, если

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad x' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n,$$

то, в силу указанной леммы,

$$(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = (y, y'). \ \square$$

В качестве модели сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства можно взять пространство, элементами которого являются последовательности действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ сходится, т. е. пространство l_2 (см. примеры 6 в п. 57.1 и пример 5 в п. 58.3).

Скалярное произведение в этом пространстве вводится по следующему правилу:

если $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ *и* $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$, *то*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{60.45}$$

Это определение имеет смысл, так как из сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$ вытекает и сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Это, например, следует из неравенства Гёльдера для рядов при $p = 2$ (оно в этом случае часто называется неравенством Коши—Шварца), но может быть получено и из элементарного неравенства

$$x_k y_k \leqslant \frac{x_k^2 + y_k^2}{2}.$$

Норма в пространстве определяется согласно общему правилу по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}. \tag{60.46}$$

ТЕОРЕМА 11. *Пространство* l_2 *является сепарабельным гильбертовым пространством.*

Доказательство. Пространство l_2 сепарабельно, так как последовательности e_k, $k = 1, 2, \ldots$, у которых на всех местах стоят нули, кроме k-го, где стоит единица, образуют ортонормированный базис и, следовательно, их конечные линейные комбинации с рациональными коэффициентами образуют счетное плотное в пространстве l_2 множество (почему?).

Полнота пространства была доказана раньше (см. пример 3 в п. 57.2). □

В силу теоремы 10, пространство l_2 изоморфно каждому сепарабельному гильбертову пространству.

В п. 60.3 было показано, что пространство $L_2[a, b]$ сепарабельно (см. там теорему 2) для любого отрезка $[a, b]$, следовательно, оно также изоморфно пространству l_2. Можно показать, что и пространство $L_2(G)$, где G — измеримое положительной меры множество n-мерного пространства, также сепарабельно и, следовательно, изоморфно l_2. Таким образом, все гильбертовы пространства интегрируемых в квадрате функций независимо от числа переменных, от которых зависят эти функции, изоморфны между собой.

60.6. Разложение функций с интегрируемым квадратом в ряд Фурье

В § 55 изучались классические ряды Фурье, т. е. ряды Фурье по тригонометрической системе функций, для абсолютно интегрируемых функций. В этом пункте будет получен ряд следствий из общей теории рядов Фурье в гильбертовых пространствах и из свойства полноты системы тригонометрических функций в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ для тригонометрических рядов Фурье более узкого класса функций, чем абсолютно интегрируемые, а именно для функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом, т. е. для функций пространства $RL_2[-\pi, \pi]$ (см. пример 3 в п. 59.2).

Прежде всего заметим, что если в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ за ортогональную систему взять тригонометрическую систему

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \dots, \ \cos nx, \ \sin nx, \dots,$$

то коэффициенты Фурье элемента $f \in L_2[-\pi, \pi]$ по этой системе будут определяться, согласно (60.25), по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(f, 1), \ a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx),$$
$$b_n = (f, \sin nx), \ n = 1, 2, \dots, \qquad (60.47)$$

так как $\|1\|_{L_2} = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\|_{L_2} = \|\sin nx\|_{L_2} = \sqrt{\pi}$ (см. п. 60.1).

Если f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция, то $f \in$ $\in CL_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi]$. Сравнивая формулы (60.47) для коэффициентов Фурье функции f с формулами (55.6) (скалярное произведение, как обычно, задается формулами (59.11)), видим, что все они совпадают, кроме формулы для коэффициента a_0, которая в (60.47) отличается от формулы в (55.6) мно-

жителем 1/2. Отдавая дань традиции, будем в дальнейшем придерживаться формулы (55.6) для a_0, т. е. считать, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1) \tag{60.48}$$

и записывать тригонометрический ряд Фурье в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Применяя теорему 6 к тригонометрической системе (60.2), в силу полноты этой системы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (см. пример 3 в п. 60.3), получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 12. *Каждый элемент $f \in L_2[-\pi, \pi]$ раскладывается в этом пространстве в ряд Фурье по тригонометрической системе*

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{60.49}$$

причем справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Каждая функция $f(x)$ с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом:*

1) *является пределом в смысле среднего квадратичного* (см. п. 58.4) *своих частичных сумм Фурье $S_n(x)$ по тригонометрической системе функций при $n \to \infty$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0; \tag{60.50}$$

2) *и для нее справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{60.51}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если функция f с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом и все ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе равны нулю, то она эквивалентна нулю.*

Здесь везде коэффициенты Фурье при $n = 1, 2, \ldots$, определяются по формулам (60.47), а коэффициент a_0 — по формуле (60.48).

Поскольку сама теорема 12 вытекает из теоремы 6, то нуждаются в доказательстве только ее следствия.

Итак, пусть функция $f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$, т. е. $f(x) \in RL_2[-\pi, \pi]$ (см. пример

7 в п. 58.3 и пример 3 в п. 59.2). Прежде всего заметим, что любая ей эквивалентная функция $g(x)$ (см. замечание 1 в п. 59.5) имеет те же коэффициенты Фурье и, следовательно, тот же ряд Фурье. Это следует из того, что почти скалярное произведение в пространстве $RL_2[-\pi, \pi]$ не меняется, если его сомножители заменить им эквивалентными (см. формулу (59.11)), и потому, если $f \sim g$, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, 1)_{RL_2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, \cos nx)_{RL_2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(f, \sin nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, \sin nx)_{RL_2}, \quad n = 1, 2, \dots\ ^*.$$

Следовательно, если через F обозначить класс эквивалентных функций, содержащий функцию f, то, в силу определения (59.11) скалярного произведения классов эквивалентных функций, т. е. скалярного произведения в пространстве $\widetilde{RL}_2[-\pi, \pi]$ (см. п. 59.4), будем иметь

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(F, 1)_{\widetilde{RL}_2},\ a_n = \frac{1}{\pi}(F, \cos nx)_{\widetilde{RL}_2},\ b_n = \frac{1}{\pi}(F, \sin nx)_{\widetilde{RL}_2}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

т. е. ряд Фурье элемента $F \in \widetilde{RL}_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi]$ совпадает с рядом Фурье каждой функции $f \in F$. Согласно теореме 12, в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ имеет место разложение

$$F = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{60.52}$$

и равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\|F\|_{L_2}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{60.53}$$

Если $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — частичная сумма ряда Фурье (60.52), то сходимость этого ряда в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ к элементу F означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \|F - S_n(x)\|_{L_2} = 0. \tag{60.54}$$

* Индекс у скалярных и почти скалярных произведений указывает, в каких пространствах берутся рассматриваемые произведения.

Если теперь $f \in F$, то (см. (59.23))

$$\|F - S_n(x)\|_{L_2} = \|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 dx}\,, \quad (60.55)$$

где $\|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2}$ — полунорма функции $f(x) - S_n(x)$ в пространстве $RL_2[-\pi, \pi]$, что имеет смысл, так как $f(x) - S_n(x) \in$ $\in F - S_n(x)$. Из (60.54) и (60.55) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \lim_{n \to \infty} \|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2} = 0,$$

т. е. равенство (60.50) доказано.

Далее, так как, в силу той же формулы (59.23), имеют место равенства

$$\|F\|_{L_2} = \|f\|_{RL_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}$$

и так как коэффициенты Фурье у F и f одинаковы, то (60.51) для функции $f \in RL_2$ следует непосредственно из (60.53).

Для доказательства следствия 2 заметим, что если все коэффициенты Фурье функции $f \in RL_2[-\pi, \pi]$ по тригонометрической системе равны нулю, то из равенства Парсеваля (60.51) следует, что

$$\|f\|^2_{RL_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0,$$

а это, согласно определению 5 из п. 59.4 эквивалентных функций, и означает, что $f \sim 0$.

Итак, обратим внимание на то, что если у функции с интегрируемым квадратом все коэффициенты Фурье равны нулю, то она не обязательно является тождественным нулем, а только эквивалентна ему.

Оба следствия доказаны. □

Из равенства Парсеваля (60.51) еще раз (независимо от теоремы 2 п. 55.2) следует, что коэффициенты Фурье функции $f(x)$ стремятся к нулю (так как общий член сходящегося ряда (60.51) всегда стремится к нулю), однако лишь для функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом. Так как всякая функция, непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$, является и функцией с интегрируемым квадратом, то для нее также справедливо утверждение первого следствия теоремы 12: она раскладывается в ряд Фурье, сходящийся к ней в смысле среднего квадратичного, и для нее справедливо равенство Парсеваля (60.51).

Второе же следствие для непрерывных функций может быть существенно усилено. Сформулируем его в виде отдельной теоремы.

ТЕОРЕМА 13. *Если все коэффициенты Фурье непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции равны нулю, то сама эта функция тождественно равна нулю.*

Этот факт был установлен нами раньше (см. в п. 55.6 следствие из теоремы 6) для функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимающих на его концах одинаковые значения. Оказывается, что, используя теорию рядов Фурье в гильбертовых пространствах, можно отказаться от условия равенства значений функций на концах отрезка $[-\pi, \pi]$.

СЛЕДСТВИЕ (теорема единственности разложения непрерывной функции в ряд Фурье). *Если две непрерывные функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то они тождественно равны.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и все ее коэффициенты Фурье равны нулю, то из равенства Парсеваля (60.51) имеем $\|f\|_{RL_2} = 0$. Но полунорма пространства $RL_2[-\pi, \pi]$ на множестве непрерывных функций является нормой (см. пример 8 в п. 58.3), поэтому $f(x) = 0$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$.

Следствие вытекает из того, что разность двух функций, у которых одинаковые коэффициенты Фурье, имеет коэффициенты Фурье, равные нулю, и потому является тождественным нулем. □

Замечание 1. Теоремы 12 и 13 были сформулированы применительно к тригонометрической системе функций. Подобные утверждения справедливы, конечно, для любой полной ортогональной системы функций, т. е. системы, образующей ортогональный базис в пространстве $L_2[a, b]$. В частности, аналогичные утверждения справедливы для разложений функций по полиномам Лежандра (см. пример 2 в п. 60.3) в пространстве $L_2[-1, 1]$. Например, если все коэффициенты Фурье непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции по системе полиномов Лежандра равны нулю, то эта функция равна нулю во всех точках отрезка $[-1, 1]$. Доказательства подобных утверждений могут быть проведены по той же схеме, что и выше.

Замечание 2. Основным и существенным фактом, позволившим доказать теорему 12, является полнота тригонометрической системы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, которая, в свою очередь, основывается на возможности сколь угодно точно в смысле среднего квадратичного приблизить на отрезке $[-\pi, \pi]$ всякую функцию с интегрируемым на этом отрезке квадратом непрерывной финитной на интервале $[-\pi, \pi]$ функцией (см. лемму 11 из п. 59.5). Использование же общей теории о разло-

жении по ортогональным системам в гильбертовом пространстве носило по существу лишь терминологический характер и позволило более кратко и наглядно проводить и записывать рассуждения. В качестве примера понятия, которое весьма удобно при рассмотрении изучаемых вопросов, отметим прежде всего понятие линейного нормированного пространства (в частности, предгильбертова пространства), а значит, и понятие нормы. Введение этих понятий позволило изложить теорию разложений по ортонормированным системам вне зависимости от их конкретного вида. Эти понятия имеют разнообразное применение и в различных других разделах математики.

В заключение, используя полученные результаты, докажем еще одну теорему.

ТЕОРЕМА 14. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если ее ряд Фурье сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, то его сумма равна функции f.*

Доказательство. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— сумма ряда Фурье функции f.

Прежде всего функция $S(x)$, как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, также непрерывна. Далее, в силу теоремы 1 п. 55.1, коэффициентами Фурье функции $S(x)$ являются числа a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, две непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f и S имеют одинаковые коэффициенты Фурье, и поэтому, в силу следствия теоремы 13, они совпадают во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$: $f(x) = S(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. □

60.7. Ортогональные разложения гильбертовых пространств в прямую сумму

Определение 7. *Подмножество линейного пространства X со скалярным произведением называется его подпространством, если оно является подпространством X как линейного пространства и является, кроме того, замкнутым множеством.*

Примером подпространств линейных пространств со скалярным произведением являются ядра ограниченных линейных операторов.

В самом деле, пусть A — линейный ограниченный оператор на предгильбертовом пространстве X и

$$\ker A = \{x \in X\colon Ax = 0\}; \tag{60.56}$$

тогда, как мы уже знаем (см. лемму 2 в п. 58.1), ядро $\ker A$ является подпространством линейного пространства X. Замкнутость ядра $\ker A$ следует из непрерывности оператора A (см. п. 58.6); если

$$y_n \in \ker A, \text{ т. е. } A(y_n) = 0,$$

и

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y,$$

то

$$A(y) = A(\lim_{n \to \infty} y_n) = \lim_{n \to \infty} A(y_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0,$$

т. е. $y \in \ker A$, что и означает замкнутость ядра $\ker A$. □

Определение 8. *Если X — линейное пространство со скалярным произведением и Y — его подмножество, то множество $Y^\perp$ всех элементов пространства X, ортогональных всем элементам множества Y:*

$$Y^\perp \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : (x, y) = 0, y \in Y\}, \tag{60.57}$$

называется ортогональным дополненением множества Y.

Легко видеть, что

$$(Y^\perp)^\perp \supset Y.$$

ЛЕММА 8. *Если Y — подпространство линейного пространства X со скалярным произведением, то $Y^\perp$ также является подпространством пространства X.*

Доказательство. Если $z_1 \in Y^\perp$, $z_2 \in Y^\perp$, то для любых чисел λ_1, λ_2 и любого $y \in Y$ имеем

$$(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, y) = \lambda_1 (z_1, y) + \lambda_2 (z_2, y) = 0$$

и, следовательно, $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in Y^\perp$, т. е. $Y^\perp$ является подпространством линейного пространства X.

Замкнутость множества $Y^\perp$ следует из непрерывности скалярного произведения: если $z_n \in Y^\perp$ и $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$, то для любого $y \in Y$ имеем

$$(z, y) = (\lim_{n \to \infty} z_n, y) = \lim_{n \to \infty} (z_n, y) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0,$$

т. е. $z \in Y^\perp$, а это и означает замкнутость множества $Y^\perp$. □

ТЕОРЕМА 15. *Если Y — подпространство гильбертова пространства X и $x_0 \in X$, то существует такой единственный элемент $y_0 \in Y$, что*

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|. \qquad (60.58)$$

Элемент y_0 называется *ортогональной проекцией элемента* x_0 в подпространство Y. Очевидно, эта теорема является обобщением теоремы 3 п. 60.4 (см. (60.29)) на случай, когда подпространство Y не является обязательно конечномерным.

Доказательство. Пусть X — гильбертово пространство, $x \in X$, и Y — подпространство пространства X. Положим

$$d \overset{\text{def}}{=} \inf_{y \in Y} \|x_0 - y_n)\|^2.$$

Выберем последовательность точек $y_n \in Y$ так, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \|x_0 - y_n\|^2 = d. \qquad (60.59)$$

Заметим, что для любых элементов u и v какого-либо линейного пространства со скалярным произведением имеет место тождество

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2. \qquad (60.60)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно записать это равенство через скалярные произведения

$$\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2}\right) + \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{2}(u, u) + \frac{1}{2}(v, v)$$

и произвести соответствующее умножение, воспользовавшись дистрибутивностью скалярного произведения. Положив в тождестве (60.60) $u = x_0 - y_n$, $v = x_0 - y_m$, получим

$$\left\|x_0 - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|y_n - y_m\|^2 = \frac{1}{2}\|x_0 - y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_0 - y_m\|^2. \qquad (60.61)$$

Так как $\frac{y_n + y_m}{2} \in Y$, то

$$\left\|x_0 - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \geqslant d. \qquad (60.62)$$

В силу условия (60.59), для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\|x_0 - y_n\|^2 < d + \frac{\varepsilon^2}{4}. \qquad (60.63)$$

Поэтому если $n > n_0$ и $m > n_0$, то из равенства (60.61), в силу неравенств (60.62) и (60.63), следует, что

$$d + \frac{1}{4}\ \|y_n - y_m\|^2 < \frac{1}{2}\left(d + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(d + \frac{\varepsilon^2}{4}\right),$$

т. е. при $n > n_0$ и $m > n_0$ выполняется неравенство

$$\|y_n - y_m\| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{y_n\}$ фундаментальная, а поэтому, в силу полноты пространства X, она сходится.

Пусть

$$y_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} y_n. \tag{60.64}$$

Отсюда, в силу непрерывности нормы, следует, что на элементе y_0 достигается минимум отклонения $\|x_0 - y\|$ элемента x_0 от подпространства Y, т. е. выполняется условие (60.58). В самом деле,

$$\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - \lim_{n \to \infty} y_n\| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \|x_0 - y_n\| \underset{(60.59)}{=} \sqrt{d} = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|. \tag{60.65}$$

Таким образом, так как нижняя грань в равенстве (60.58) достигается, то ее можно заменить минимумом

$$\|x_0 - y_0\| = \min_{y \in Y} \|x_0 - y\|. \tag{60.66}$$

Покажем, что в подпространстве Y элемент y_0, обладающий этим свойством, единствен. Действительно, если $y_1 \in Y$,

$$\|x_0 - y_1\|^2 = d, \tag{60.67}$$

то, положив в тождестве (60.60) $u = x_0 - y_0$, $v = x_0 - y_1$, получим

$$\left\|x_0 - \frac{y_0 + y_1}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|y_0 - y_1\|^2 = \frac{1}{2}\|x_0 - y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|x_0 - y_1\|^2. \tag{60.68}$$

Так как $\frac{y_0 + y_1}{2} \in Y$, то, на основании (60.59), выполняется неравенство

$$\left\|x_0 - \frac{y_0 + y_1}{2}\right\|^2 \geqslant d,$$

а так как, кроме того,

$$\|x_0 - y_0\|^2 = d,\ \|x_0 - y_1\|^2 = d,$$

то из (60.68) следует неравенство

$$d + \frac{1}{4}\|y_0 - y_1\|^2 \leqslant d,$$

т. е. $\|y_0 - y_1\|^2 \leqslant 0$, что возможно лишь тогда, когда $y_0 = y_1$ □.

З а м е ч а н и е 1. Из доказательства теоремы 15 видно, что полнота пространства X использовалась лишь для существования ортогональной проекции элемента в подпространство, а не для ее единственности. Таким образом, если у элемента линейного пространства со скалярным произведением существует ортогональная проекция в некоторое подпространство, то она единственна.

В рассматриваемом случае имеет место и обобщение следствия леммы 4 п. 60.4.

ТЕОРЕМА 16. *Для того чтобы элемент y_0 был ортогональной проекцией элемента x_0 гильбертова пространства X в его подпространство Y, необходимо и достаточно, чтобы для всех $y \in Y$ выполнялось условие*

$$(x_0 - y_0, y) = 0, \tag{60.69}$$

т. е. чтобы $x_0 - y_0 \perp Y$.

Доказательство необходимости условия (60.69). Пусть задан элемент $y \in Y$ и элемент $x_0 \in X$ удовлетворяет условию **(60.66)**. Выберем произвольно элемент $y \in Y$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(t) \overset{\text{def}}{=} \|x_0 - y_0 + ty\|^2 = (x_0 - y_0 + ty, x_0 - y_0 + ty) =$$
$$= (x_0 - y_0, x_0 - y_0) + 2t(x_0 - y_0, y) + t^2(y, y),$$
$$-\infty < t < +\infty.$$

Найдем ее производную:

$$f'(t) = 2((x_0 - y_0, y) + t(y, y)). \tag{60.70}$$

Так как $y_0 - ty \in Y$, то, в силу (60.66), функция f достигает наименьшего значения при $t = 0$. Следовательно, $f'(0) = 0$, или, в силу формулы (60.70),

$$(x_0 - y_0, y) = 0$$

(для произвольного $y \in Y$), т. е. выполняется условие (60.69).

Доказательство достаточности условия **(60.69)**. Пусть $x_0 \in X$, $y_1 \in Y$ и для всех элементов $y \in Y_0$ выполняется условие

$$(x_0 - y_1, y) = 0. \tag{60.71}$$

Покажем, что элемент y_1, удовлетворяющий этому условию, единствен. Действительно, пусть элемент $y_2 \in Y$ таков, что для всех $y \in Y$ также выполняется условие

$$(x_0 - y_2, y) = 0; \tag{60.72}$$

написав тождество

$$y_1 - y_2 + (x_0 - y_1) - (x_0 - y_2) = 0 \qquad (60.73)$$

и заметив, что $y_1 - y_2 \in Y$, умножим скалярно равенство (60.73) на $y_1 - y_2$. Тогда, в силу (60.71) и (60.72), будем иметь $(y_1 - y_2, y_1 - y_2) = 0$, т. е.

$$\|y_1 - y_2\| = 0,$$

а из этого следует, что $y_1 = y_2$. Выше было доказано, что элемент y_0, удовлетворяющий условию (60.66), удовлетворяет и условию (60.69). Следовательно, в силу единственности такого элемента, имеем $y_1 = y_0$, т. е. элемент y_1 является ортогональной проекцией элемента x_0 в пространстве Y. □

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что для любого билинейного функционала $A(x, y)$ (билинейного отображения, см. п. 58.7) имеет место тождество, аналогичное тождеству (60.60):

$$A\left(\frac{u+v}{2}\right) + A\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{2}A(u) + \frac{1}{2}A(v),$$

где $A(x) = A(x, x)$.

Поэтому метод, примененный в доказательствах теорем 15 и 16, является типичным для решения задач на экстремум квадратичных функционалов $A(x)$ в бесконечномерных пространствах.

ТЕОРЕМА 17. *Линейное пространство X со скалярным произведением является прямой суммой всякого своего подпространства Y и его ортогонального дополнения $Y^\perp$:*

$$X = Y \oplus Y^\perp. \qquad (60.74)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению прямой суммы (см. п. 58.1), надо доказать, что каждый элемент $x \in X$ представим в виде $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Y^\perp$, и при этом единственным образом.

Пусть $x \in X$; обозначим через $y \in Y$ его ортогональную проекцию на пространство Y и положим $z \overset{\text{def}}{=} x - y$. Тогда, очевидно,

$$x = y + z \qquad (60.75)$$

и, согласно теореме 15, имеет место равенство $(x - y, y) = 0$, или

$$(z, y) = (x - y, y) = 0,$$

т. е. элемент z ортогонален элементу y и, следовательно, $z \in Y^\perp$.

Докажем единственность разложения элемента x в сумму элементов, принадлежащих ортогональным подпространствам X и Y. Хотя она следует и из предыдущих результатов, для наглядности приведем ее прямое доказательство.

Если $x = y_1 + z_1$ ($y_1 \in Y$, $z_1 \in Y^{\perp}$), то, вычитая это равенство из равенства (60.75), получим

$$(y - y_1) + (z - z_1) = 0.$$

Так как $y - y_1 \in Y$, $z - z_1 \in Y^{\perp}$ и, следовательно, $y - y_1 \perp z - z_1$, то из теоремы Пифагора

$$\|(y - y_1) + (z - z_1)\|^2 = \|y - y_1\|^2 + \|z - z_1)\|^2$$

имеем

$$\|y - y_1\|^2 + \|z - z_1\|^2 = 0,$$

откуда $y = y_1$, $z = z_1$. □

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать, что если X — линейное пространство со скалярным произведением и Y — его подпространство, то

$$(Y^{\perp})^{\perp} = Y.$$

60.8. Функционалы гильбертовых пространств

При изучении линейных нормированных пространств и пространств других типов большую роль играют так называемые линейные функционалы на этих пространствах, с которыми мы встречались в случае конечномерных пространств (см. п. 41.5). В дальнейшем мы убедимся в существенном значении линейных функционалов на примере теории обобщенных функций, а теперь сформулируем их определение для случая линейных нормированных пространств.

Определение 9. *Линейное отображение линейного нормированного пространства в множество действительных чисел называется линейным функционалом на этом пространстве* (*или над этим пространством*). □

Очевидно, что линейные функционалы линейного нормированного пространства X являются частным случаем операторов $X \to Y$, когда линейное нормированное пространство Y является множеством действительных чисел, и поэтому для линейных функционалов справедливы все понятия, введенные для линейных операторов, например их ограниченность, непрерывность, норма, и имеют место все их свойства, доказанные выше (см. п. 58.6). В частности, непрерывность и ограни-

ченность линейного функционала эквивалентны между собой. Функционалы линейного нормированного пространства также (как и вообще операторы) образуют линейное нормированное пространство, которое называется *сопряженным данному*.

В случае конечномерных пространств было показано, что все функционалы порождаются скалярным произведением; покажем, что аналогичное утверждение верно и для гильбертовых пространств.

ТЕОРЕМА 18. *Для всякого линейного ограниченного функционала f действительного гильбертова пространства X существует единственный элемент $a \in X$ такой, что для всех $x \in X$ выполняется равенство*

$$f(x) = (x, a), \tag{60.76}$$

причем $\|f\| = \|a\|$. Обратно: если $a \in X$, то отображение

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} (a, x), \quad x \in X, \tag{60.77}$$

является непрерывным линейным функционалом и $\|f\| = \|a\|$.

СЛЕДСТВИЕ. *Гильбертово пространство изоморфно со своим сопряженным пространством.*

Доказательство. Прежде всего очевидно, что функционал $f(x) = (x, a)$ линейный и ограниченный. Последнее следует из неравенства Коши—Шварца

$$|f(x)| = |(x, a)| \leqslant \|x\| \, \|a\|.$$

Так как при $x = a$ это неравенство превращается в равенство, то (см. п. 58.6)

$$\|f\| = \|a\|.$$

Пусть f — линейный ограниченный функционал на гильбертовом пространстве X, а Y — его ядро:

$$Y \overset{\text{def}}{=} \ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}. \tag{60.78}$$

Тогда, как это было показано в п. 60.7, множество Y является подпространством пространства X. Обозначим через Z ортогональное дополнение в X подпространства Y, т. е. $Z = Y^{\perp}$.

Если $f \equiv 0$ на X, что равносильно равенству $X = Y$, то формула (60.76) очевидна, так как для любого $x \in X$ имеем $f(x) = (0, x) = 0$, т. е. $a = 0$.

Пусть $f \not\equiv 0$ на X и, следовательно, $X \neq Y$. Поэтому существует такой элемент $x_0 \in X$, что $x_0 \notin Y$ и, следовательно, $f(x_0) \neq 0$.

Согласно теореме 16, имеет место разложение

$$x_0 = y_0 + z_0,\ y_0 \in Y,\ z_0 \in Z.$$

Так как $f(x_0) \neq 0$, $f(y_0) = 0$ (так как $y_0 \in Y = \ker f$), то

$$f(x_0) = f(y_0 + z_0) = f(y_0) + f(z_0) = f(z_0)$$

и, следовательно,

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} f(z_0) \neq 0. \tag{60.79}$$

Положим $z_1 = \dfrac{z_0}{\alpha}$. Тогда

$$f(z_1) = f\left(\frac{z_0}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f(z_0) = 1.$$

Выберем произвольно элемент $x \in X$ и пусть

$$f(x) = \beta; \tag{60.80}$$

тогда

$$f(x - \beta z_1) = f(x) - \beta f(z_1) = 0.$$

Поэтому элемент $x - \beta z_1$ принадлежит пространству Y:

$$y \overset{\text{def}}{=} x - \beta z_1 \in Y. \tag{60.81}$$

Таким образом,

$$x = y + \beta z_1,\ \ y \in Y,\ \ \beta z_1 \in Z. \tag{60.82}$$

Так как $y \perp z_1$, то

$$(x, z_1) \underset{(60.82)}{=} \beta(z_1, z_1). \tag{60.83}$$

Положим

$$a \overset{\text{def}}{=} \frac{z_1}{(z_1, z_1)}; \tag{60.84}$$

тогда

$$f(x) \underset{(60.80)}{=} \beta \underset{(60.83)}{=} \frac{(x, z_1)}{(z_1, z_1)} = \left(x, \frac{z_1}{(z_1, z_1)}\right) \underset{(60.84)}{=} (x, a).$$

Таким образом, искомый элемент a найден и формула (60.76) доказана.

Покажем, что такой элемент a единственный. Если элемент $b \in X$ таков, что для всех $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = (x, b)$, а следовательно, и $(x, b - a) = 0$, то, положив $x = b - a$, получим $\|b - a\| = 0$ и, следовательно, $a = b$.

Следствие теоремы вытекает из того, что при указанном соответствии элементов $a \in X$ и линейных функционалов $f(x) = (x, a)$, $x \in X$, линейной комбинации элементов пространства X соответствует аналогичная линейная комбинация функционалов. □

З а м е ч а н и е 3. Изоморфизм гильбертова пространства с ему сопряженным имеет место и для комплексных гильбертовых пространств.

60.9*. Преобразование Фурье интегрируемых в квадрате функций. Теорема Планшереля

Если квадрат функции f интегрируем на всей действительной оси, то сама функция f, вообще говоря, не абсолютно интегрируема на всей оси, как это видно на примере функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Поэтому, на основании теории преобразования Фурье, изложенной в § 56, нельзя утверждать существование преобразования Фурье для функций из пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Покажем, что в этом случае можно определить преобразование Фурье в некотором обобщенном смысле. Предварительно остановимся на определении пространства $L_2(-\infty, \infty)$ для комплекснозначных функций.

Пусть f и g — две непрерывные функции с интегрируемым квадратом модуля на всей оси и принимающие, вообще говоря, комплексные значения. Их скалярное произведение определяется в этом случае по формуле

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Легко проверяется, что все свойства, которыми должно обладать скалярное произведение в комплексном линейном пространстве (см. п. 59.1), в этом случае выполняются.

Пространство $L_2(-\infty, \infty)$, которое мы будем рассматривать в этом пункте, определим как пополнение предгильбертова пространства непрерывных и с интегрируемым на всей оси квадратом модуля комплекснозначных функций с указанным скалярным произведением (ср. с теоремой 3 в п. 59.5).

Через $\|f\|$ в настоящем параграфе обозначается норма элемента $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

а также и полунорма

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}dx},$$

для функций f с интегрируемым на всей оси квадратом модуля. Выше для случая действительных функций отмечалось без

доказательства (см. п. 59.5), что каждый элемент пространства L_2 можно рассматривать как класс функций. Аналогичный факт справедлив и для пространства L_2 комплекснозначных функций, причем полунорма $\|f\|$ функций f совпадает с нормой элемента пространства L_2, которому принадлежит (в смысле, аналогичном указанному в п. 59.5) функция f. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих фактов и не будем их использовать в дальнейшем.

Комплекснозначную функцию $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — действительные функции, $-\infty < x < +\infty$, назовем финитной ступенчатой функцией, если финитными ступенчатыми функциями являются функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (см. определение 7 в п. 55.2). В дальнейшем для краткости финитные ступенчатые функции будем называть просто ступенчатыми функциями.

Любые две ступенчатые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принимающие только действительные значения, можно представить в виде конечной линейной комбинации с действительными коэффициентами одних и тех же одноступенчатых функций (см. п. 55.2), принимающих значения 1 и 0. Для этого достаточно взять всевозможные непустые пересечения полуинтервалов постоянства функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Эти пересечения также являются полуинтервалами $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, на которых постоянны одновременно функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому если

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ 0, \text{ если } x < x_{k-1} \text{ или } x \geqslant x_k, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

— соответствующие одноступенчатые функции, то существуют такие действительные числа λ_k, $\mu_k = 1, 2, \ldots$, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_k(x).$$

Отсюда следует, что комплекснозначная ступенчатая функция $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \omega_k(x), \tag{60.85}$$

где $\zeta_k = \lambda_k + i\mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, n,$ — комплексные числа.

ЛЕММА 9. *Пусть f — комплекснозначная ступенчатая функция и $F[f]$ — ее преобразование Фурье, тогда*

$$\|F[f]\| = \|f\|.$$

Доказательство. Если функция f задана формулой (60.85), то

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}\,dx =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \zeta_j \overline{\zeta_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_j(x)\overline{\omega_k(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 (x_k - x_{k-1}). \quad (60.86)$$

Пусть теперь $0 < \eta < +\infty$; тогда

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)}\,e^{i\xi y}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(\xi)}\,dx\,d\xi \int_{-\eta}^{\eta} e^{iy(\xi - x)}dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{f(\xi)}\,\frac{\sin \eta(\xi - x)}{\xi - x}\,dx\,d\xi. \quad (60.87)$$

Все преобразования здесь законны, так как на самом деле все интегралы берутся в конечных пределах.

Поскольку действительная и мнимая части функции $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы о представлении функций с помощью интеграла Фурье (см. теорему 1 в п. 56.1), то для всех x, кроме $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеем (см. доказательство указанной теоремы)

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)}\,\frac{\sin \eta(\xi - x)}{\xi - x}\,d\xi = \overline{f(x)}.$$

Оказывается, что в силу этого, при наших предположениях в последнем интеграле (60.87) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta \to +\infty$. Однако соответствующая теорема не была доказана в настоящем курсе, и потому нам придется сделать несколько дополнительных вычислений. Подставляя (60.85) в (60.87), получим

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\,\overline{F[f]}\,dy = \frac{1}{\pi}\sum_{i,k=1}^{n} \zeta_j \overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\sin \eta(\xi - x)}{\xi - x}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{j,k=1}^{n} \zeta_j \overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{\eta(x_{k-1} - x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\sin t}{t}\,dt. \quad (60.88)$$

Рассмотрим поведение каждого слагаемого получившейся суммы при $\eta \to +\infty$. Если $j = k$, то, меняя порядок интегрирования (рис. 17) и производя интегрирование по переменной x, получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{0}^{\eta(x_k - x_{k-1})} \left(x_k - x_{k-1} - \frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\eta(x_k - x_{k-1})}^{0} \left(x_k - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\, dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,(x_k - x_{k-1})\int\limits_{0}^{\eta(x_k - x_{k-1})} \frac{\sin t}{t}\, dt + \frac{2}{\pi\eta}\,[1 - \cos\,(x_k - x_{k-1})].$$

Так как

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

(см. п. 54.4), то

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{2}{\pi}(x_k - x_{k-1})\int\limits_{0}^{\eta(x_k - x_{k-1})} \frac{\sin t}{t}\, dt = x_k - x_{k-1}.$$

Далее, очевидно, что

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{2}{\pi\eta}[1 - \cos \eta(x_k - x_{k-1})] = 0,$$

поэтому

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\sin t}{t}\, dt = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Покажем теперь, что при $j \neq k$

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.$$

Пусть для определенности $x_{j-1} < x_j \leqslant x_{k-1} < x_k$. При других расположениях полуинтервалов постоянства $[x_{j-1}, x_j)$ и $[x_{k-1}, x_k)$ доказательство аналогично. Меняя снова порядок интегрирования и производя интегрирование по x (рис. 18), с помощью аналогичных рассуждений получим

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int\limits_{\eta(x_k - x_j)}^{\eta(x_k - x_{j-1})} \left(x_k - x_{j-1} - \frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\eta(x_{k-1} - x_{j-1})}^{\eta(x_k - x_j)} (x_j - x_{j-1})\frac{\sin t}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\eta(x_{k-1} - x_j)}^{\eta(x_{k-1} - x_{j-1})} \left(x_j - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

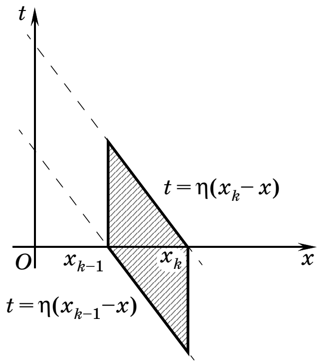


Рис. 17

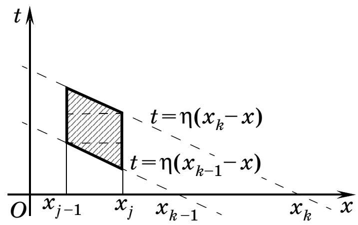


Рис. 18

Теперь из (60.88) имеем

$$\|F[f]\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} F[f]\,\overline{F[f]}\,dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\,F\overline{[f]}\,dy =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2(x_k - x_{k-1}) = \|f\|^2. \square$$

ЛЕММА 10. *Пусть f — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и равная нулю вне его, тогда существует последовательность таких ступенчатых функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0, \ \operatorname{supp}\varphi_n \subset [a, b].$$

Доказательство. Для действительных функций это следует из леммы 9 п. 59.5. Пусть теперь $\varphi = u + iv$ — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$; тогда действительные функции u и v также непрерывны на отрезке $[a, b]$. Поэтому существуют такие последовательности ступенчатых функций $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, что $\|u - u_n\| \to 0$ и $[v - v_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Если $\varphi_n = u_n + iv_n$, то $\|\varphi - \varphi_n\| \leqslant \|u - u_n\| + \|v - v_n\|$, отсюда $\|\varphi - \varphi_n\| \to \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

ЛЕММА 11. *Пусть комплекснозначная функция φ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и равна нулю вне его, тогда*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

Доказательство. Пусть φ_n — последовательность ступенчатых функций таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$$

(см. лемму 10), тогда, в силу непрерывности нормы,

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = \|\varphi\|. \tag{60.89}$$

Из неравенства же Коши—Буняковского получим

$$\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \leqslant \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx = 0,$$

т. е. последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в среднем к функции φ и в смысле L_1. Поэтому если

$$\psi = F[\varphi], \ \psi_n = F[\varphi_n], \ n = 1, 2, \dots ,$$

то последовательность непрерывных (см. следствие теоремы 2 в п. 56.7) функций $\{\psi_n\}$ равномерно сходится к функции ψ, которая в силу этого непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, в силу леммы 9,

$$\|\psi_n\| = \|\varphi_n\|. \tag{60.90}$$

Отсюда следует, в частности, что непрерывные функции ψ_n являются функциями с интегрируемым квадратом модуля, т. е. принадлежат пространству $L_2(-\infty, +\infty)$. Далее, функции ψ_n, $n = 1, 2, \dots$, образуют фундаментальную последовательность в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Это следует из сходимости в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\varphi_n\}$ и из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|^2 dy,$$

которое также вытекает из леммы 9, так как разность ступенчатых функций также является ступенчатой функцией. Покажем, что последовательность $\{\psi_n\}$ сходится к функции ψ и в пространстве L_2. Действительно, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$, тогда, в силу фундаментальности последовательности $\{\psi_n\}$, существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy < \varepsilon.$$

Тем более, для любого числа $c > 0$ будем иметь

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy < \varepsilon. \tag{60.91}$$

При фиксированных n и c при $m \to \infty$ подынтегральное выражение в (60.91) равномерно стремится к функции $|\psi_n(y) - \psi(y)|^2$. Поэтому в неравенстве (60.91) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $m \to \infty$. В результате будем иметь

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 dy \leqslant \varepsilon.$$

Устремляя теперь c к $+\infty$, получим, что при $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 dy \leqslant \varepsilon, \qquad (60.92)$$

что и означает сходимость в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\psi_n\}$ к функции ψ.

Из доказанного следует также, что $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, в силу (60.90) и (60.92),

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi - \psi_n\| + \|\psi_n\| < +\infty.$$

Наконец, из неравенства $|\, \|\psi_n\| - \|\psi\| \,| \leqslant \|\psi_n - \psi\|$ и того, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$, получим

$$\lim_{n \to \infty} \|\psi_n\| = \|\psi\|. \qquad (60.93)$$

Из (60.89), (60.90) и (60.93) следует, что

$$\|\psi\| = \|\psi_n\|. \ \square$$

ТЕОРЕМА 19 (теорема Планшереля*). *Пусть функция* φ *непрерывна и с интегрируемым квадратом модуля на всей числовой оси и пусть*

$$\psi_M(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} \varphi(x) e^{-ixy} dx, \quad M > 0.$$

Тогда:

1) *функция* $\psi_M(y)$ *также непрерывна и с интегрируемым на всей числовой оси квадратом*;

2) *при* $M \to +\infty$ *функции* ψ_M *сходятся в пространстве* L_2 $(-\infty, +\infty)$ *к некоторому элементу* $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$;

3) $\|\varphi\| = \|\psi\|$.

Доказательство. Если

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in [-M, M], \\ 0, & \text{если } x \notin [-M, M], \end{cases}$$

* М. Планшерель (1855—1967) — швейцарский математик.

то, очевидно,

$$\psi_M = F[\varphi_M],$$

$$\lim_{M \to +\infty} \varphi_M = \varphi \text{ в } L_2(-\infty, +\infty), \tag{60.94}$$

$$\lim_{M \to +\infty} \|\varphi_M\| = \|\varphi\|. \tag{60.95}$$

Согласно лемме 10,

$$\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|, \quad M > 0, \tag{60.96}$$

$$\|\psi_{M_1} - \psi_{M_2}\| = \|\psi_{M_1} - \psi_{M_2}\|, \quad M_1 > 0, \quad M_2 > 0. \tag{60.97}$$

Из (60.94) и (60.97) следует, в силу полноты пространства $L_2(-\infty, +\infty)$, что в $L_2(-\infty, +\infty)$ существует предел (почему?) $\lim\limits_{M \to +\infty} \psi_M = \psi$. В силу непрерывности нормы,

$$\lim_{M \to +\infty} \|\psi_M\| = \|\psi\|; \tag{60.98}$$

из (60.95), (60.96) и (60.98) имеем $\|\psi\| = \|\varphi\|$. □

Элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, полученный в процессе доказательства, мы будем называть *преобразованием Фурье* заданной непрерывной функции $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и писать

$$\psi = F[\varphi]. \tag{60.99}$$

Эта запись естественна, так как если функция φ, кроме того, и абсолютно интегрируема, то $\lim\limits_{M \to +\infty} \psi_M$ совпадает с обычным преобразованием Фурье. Действительно, в этом случае

$$\lim_{M \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_M(x) - \varphi(x)| dx = 0.$$

Следовательно, функции $\psi_M = F[\varphi_M]$ при $M \to \infty$ равномерно сходятся к преобразованию Фурье $F[\varphi]$ функции φ. Как мы видели, ψ_M сходится в среднем в смысле L_2 к функции ψ; отсюда нетрудно убедиться, что $\psi = F[\varphi]$ (сравните аналогичное рассуждение в доказательстве леммы 11).

Преобразование Фурье (60.99) определено пока лишь для тех элементов $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, которые являются непрерывными функциями с интегрируемым квадратом, однако по непрерывности оно может быть распространено на все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, пусть φ — произвольный элемент из пространства $L_2(-\infty, +\infty)$. Как было показано, множество непрерывных с интегрируемым квадратом на всей числовой оси функций плотно в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ (следствие теоремы 3 в п. 59.5). Следовательно, существует последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n \in L_2(-\infty, +\infty), \; n = 1, 2, \ldots,$$

такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$.

Пусть $F[\varphi_n] = \psi_n$, $n = 1, 2, \dots$. В силу теоремы Планшереля,

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \|\varphi_n - \varphi_m\|, \quad n, m = 1, 2, \dots ,$$

поэтому последовательность $\{\psi_n\}$ фундаментальна в L_2 и, следовательно, сходится. Пусть $\psi = \lim\limits_{n \to \infty} \psi_n$. По определению полагаем

$$\psi = F[\varphi]. \tag{60.100}$$

Элемент $\psi = F[\varphi] \in L_2(-\infty, +\infty)$ называется преобразованием Фурье элемента $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Если $\varphi_n^* \in L_2(-\infty, +\infty)$, $n = 1, 2, \dots$, — какая-либо другая последовательность непрерывных функций, сходящаяся в $L_2(-\infty, +\infty)$ к элементу φ, и если $\psi_n^* = F[\varphi_n^*]$, то из равенства

$$\|\varphi_n - \varphi_n^*\| = \|\psi_n - \psi_n^*\|$$

имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n^* = \psi$. Таким образом, определение (60.100) не зависит от выбора последовательности непрерывных функций, сходящейся к элементу φ.

Для любого $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|,$$

что сразу следует из того, что это равенство имеет место для непрерывных функций $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ и непрерывности нормы.

Далее, легко проверить, что преобразование Фурье F линейно на $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$F[\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2] = \lambda_1 F[\varphi_1] + \lambda_2 F[\varphi_2]$$

для любых φ_1 и φ_2 из $L_2(-\infty, +\infty)$ и любых чисел λ_1 и λ_2. Это верно для ступенчатых функций. Они образуют плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Отсюда предельным переходом указанное равенство получается для любых элементов пространства $L_2(-\infty, +\infty)$.

Наконец, преобразование Фурье отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, т. е. каков бы ни был элемент $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, существует такой элемент $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, что $F[\varphi] = \psi$. Для того чтобы это показать, следует тем же методом, как это было сделано для преобразования Фурье, определить на пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} и показать, что для любого элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство $\|F^{-1}[\psi]\| = \|\psi\|$. Затем можно показать, что

$$F[F^{-1}[\psi]] = \psi \text{ и } F^{-1}[F[\psi]] = \psi$$

для всех $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, исходя из того, что это верно на множестве ступенчатых функций, образующих плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Если теперь для элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ взять элемент $\varphi = F^{-1}[\psi]$, то получим $F[\varphi] = \psi$, что и означает, что преобразование F отображает все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя.

Суммируя все сказанное, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 20 (теорема Планшереля). *Преобразование Фурье F линейно и взаимно-однозначно отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, при этом для любого элемента $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

§ 61
Обобщенные функции

61.1. Общие соображения

В этом параграфе мы рассмотрим одно обобщение классического понятия функции, а именно понятие обобщенной функции. Оно возникло при решении некоторых физических задач и в последние годы быстро и прочно вошло в математику. С помощью этого понятия можно распространить преобразование Фурье на существенно более широкий класс функций, чем абсолютно интегрируемые или интегрируемые в квадрате функции. Оно позволяет сформулировать на математическом языке такие идеализированные понятия, как, например, плотность точечного заряда, плотность материальной точки, мгновенный импульс и т. п.

Поясним это подробнее. При изучении физических явлений с помощью математического аппарата нам неизбежно приходится пользоваться различными математическими абстракциями, в частности понятием точки. Мы говорим, например, о массе, сосредоточенной в данной точке пространства, о силе, приложенной в данный момент времени (т. е. в данной точке оси отсчета времени), о точечном источнике того или иного физического поля и т. п. Это удобно при использовании математического аппарата, хотя при этом мы воспроизводим не вполне точную реальную картину: всякая масса имеет определенный объем, всякая сила действует определенный про-

межуток времени, всякий источник поля имеет определенные размеры и т. д. Оказывается, что при таком подходе к изучению физических явлений недостаточно методов классической математики. Иногда приходится вводить новые математические понятия, создавать новый математический аппарат.

Рассмотрим в качестве примера действие «мгновенной» силы. Пусть в момент времени $t = 0$ на тело массы $m \neq 0$ подействовала сила, сообщившая ему скорость $v \neq 0$, после чего действие силы прекратилось. Обозначая через $F(t)$ силу, действующую на тело в момент времени t, получим $F(t) = 0$ при $t \neq 0$. Попытаемся найти, чему же равна сила $F(t)$ при $t = 0$. По второму закону Ньютона сила равна скорости изменения количества движения относительно времени

$$F(t) = \frac{d(mv)}{dt}$$

и, следовательно, для любого момента времени τ, $0 < \tau < +\infty$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\tau} F(t)dt = mv. \tag{61.1}$$

В качестве нижнего предела интегрирования взята $-\infty$, можно, конечно, вместо нее взять и любое число $a < 0$, поскольку до момента времени $t = 0$ тело находилось в покое.

Обратим внимание на то, что с точки зрения классической математики, т. е. с точки зрения того понятия интеграла, которое было нами изучено, равенство (61.1) лишено смысла: функция $F(t)$ равна нулю во всех точках, кроме $t = 0$, и потому стоящий в левой части формулы (61.1) интеграл, рассматриваемый как несобственный, равен нулю, в то время как правая часть этого равенства не равна нулю. Вместе с тем, исходя из физических соображений, естественно ожидать, что написанное равенство имеет определенный смысл. Это противоречие означает, что мы оказались за пределами возможности использования известного нам математического аппарата, что необходимо ввести какие-то новые математические понятия.

Предположим, для простоты, что количество движения, которое получило тело, равно единице, т. е. что $mv = 1$. В этом случае силу $F(t)$, действующую на тело, будем обозначать через $\delta(t)$, следовательно, формула (61.1) будет теперь иметь вид

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)dt = 1,\ \tau > 0. \tag{61.2}$$

Функция $\delta(t)$ называется обычно дельта-функцией (δ-функцией), или функцией Дирака*.

Чтобы лучше вникнуть в сущность вопроса, предположим, что на тело действует не мгновенная сила, а что в течение промежутка времени от $-\varepsilon$ до 0 ($\varepsilon > 0$) на тело действует некоторая постоянная сила, которую мы обозначим через $\delta_\varepsilon(t)$. Предположим также, что эта сила сообщает нашему телу то же самое количество движения, равное единице. Короче говоря, распределим искомую силу $\delta(t)$ на интервал длины ε. Найдем силу $\delta_\varepsilon(t)$.

По закону Ньютона для любого времени $\tau \geqslant 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Так как сила $\delta_\varepsilon(t)$ равна нулю вне отрезка $[-\varepsilon, 0]$, а на этом отрезке постоянна, то

$$1 = \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{0} \delta_\varepsilon(t)dt = \varepsilon\delta_\varepsilon(t), \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0.$$

Поэтому

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{если} \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad t < -\varepsilon \text{ или } t > 0. \end{cases} \tag{61.3}$$

Естественно предположить, что мгновенная сила $\delta(t)$ получается из «распределенной силы» $\delta_\varepsilon(t)$ предельным переходом при $\varepsilon \to 0$, т. е.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t),$$

тогда

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad t = 0, \\ 0, & \text{если} \quad t \neq 0. \end{cases} \tag{61.4}$$

Эта формула не дает нам возможности, используя известные определения интеграла (собственного или несобственного), получить формулу (61.2). Равенство нулю функции во всех точках, кроме одной, где она равна бесконечности, и одновременное равенство интеграла от этой функции единице противоречат друг другу в рамках той математики, которая в настоящее время называется классической. Это приводит к мысли о необходимости введения нового определения — определения «интеграла» (61.2).

* П. Дирак (1902—1984) — английский физик.

Физически естественно считать, что количество движения, приданное телу мгновенной силой $\delta(t)$, т. е. интеграл (61.2) является пределом количества движения, приданного телу распределенными во времени силами $\delta_\varepsilon(t)$, когда время их действия стремится к нулю, т. е. когда $\varepsilon \to 0$. Поэтому положим, по определению,

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)dt, \quad \tau > 0.$$

Отсюда, в силу равенства $\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)dt \equiv 1$, $\tau > 0$, для всех $\varepsilon > 0$ и следует непосредственно равенство (61.2).

Таким образом, когда говорится, что интеграл (61.2) от дельта-функции равен единице, то этот интеграл следует понимать как предел соответствующих обычных интегралов от δ_ε-функций при $\varepsilon \to +0$.

Оказывается полезным дать аналогичным образом определение и более общих «интегралов», а именно интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)f(t)dt, \quad -\infty < \tau < +\infty, \tag{61.5}$$

где $f(t)$ — некоторая непрерывная функция. Именно, определим символ (61.5) равенством

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau)f(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)f(t)dt. \tag{61.6}$$

Чтобы доказать, что это определение корректно, надо доказать, что предел (61.6) всегда существует. Покажем, более того, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)f(t)dt = \begin{cases} f(0) \text{ при } \tau \geqslant 0, \\ \ \ 0 \quad \text{ при } \tau < 0. \end{cases} \tag{61.7}$$

Пусть сначала $\tau \geqslant 0$. Используя (61.3), получим

$$\left|\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)f(t)dt - f(0)\right| = \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0} f(t)dt - \frac{f(0)}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0} dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0} |f(t) - f(0)|dt. \tag{61.8}$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ при $x = 0$, для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_\eta > 0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t| < \varepsilon_\eta$, выполняется неравенство

$$|f(t) - f(0)| < \eta.$$

Поэтому для всех $\varepsilon < \varepsilon_\eta$ из неравенства (61.8) следует, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)f(t)dt - f(0)\right| < \frac{\eta}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0} dt = \eta.$$

Так как $\eta > 0$ — произвольное число, то равенство (61.7) при $\tau \geqslant 0$ доказано. Еще проще оно доказывается при $\tau < 0$. Итак, из определения (61.6) следует, что для любой непрерывной функции $f(t)$ справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)f(t)dt = \begin{cases} f(0) & \text{при} \quad \tau \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad \tau < 0. \end{cases} \tag{61.9}$$

Формула (61.2) следует отсюда при $f(t) \equiv 1$. Если положить

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0, \end{cases} \tag{61.10}$$

то формула (61.9) при $f(t) \equiv 1$ перепишется в виде

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)dt. \tag{61.11}$$

Функция $\theta(t)$ имеет специальное название — она называется *функцией Хевисайда**. Вычисляя производную функции $\theta(t)$ согласно классическому определению производной, из (61.10) получим

$$\theta'(t) = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad t = 0, \\ 0 & \text{при} \quad t \neq 0. \end{cases} \tag{61.12}$$

На основании этого было бы неверно утверждать, что $\theta'(t)$ является дельта-функцией, так как одной лишь формулой (61.4) функция $\delta(t)$ не определяется, поскольку даже физически ясно, что только из этой формулы не может следовать, что сила $\delta(t)$ сообщает рассматриваемому телу именно единичное количество движения. Однако удобно положить, по определению,

$$\theta'(t) = \delta(t).$$

Это помимо равенства (61.12) оправдывается тем, что в этом случае сохраняется основная формула интегрального исчисления, восстанавливающая функцию по ее производной — формула Ньютона—Лейбница. Действительно, теперь формула (61.11) может быть переписана в виде

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\tau} \theta'(t)dt, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

(отметим, что $\theta'(-\infty) = 0$).

* О. Хевисайд (1850—1925) — английский физик.

Заметим, что мы не дали четкого математического определения самой функции $\delta(t)$ как функции точки (выше отмечалось, что формула (61.4) не является таким определением); это вообще невозможно сделать, так как дельта-функция является понятием другой природы. Была же определена не функция $\delta(t)$, а «интеграл» (61.5). Это не случайно. Характерным для многих задач физики является то обстоятельство, что вводимые для описания того или иного объекта функции имеют смысл лишь постольку, поскольку непосредственный физический смысл имеют некоторые интегралы от этих функций. Обобщенные функции и возникают как некоторое обобщение семейств интегралов от произведения двух функций, одна из которых фиксирована, а другая может выбираться произвольно из некоторой совокупности.

Итак, нами определено новое понятие — понятие интеграла от дельта-функции (и даже более общее понятие интеграла от произведения непрерывной функции на дельта-функцию). Это не обычный интеграл, т. е. не предел интегральных сумм, а предел соответствующих интегралов, или, образно выражаясь, «предел пределов интегральных сумм». Иначе говоря, для определения интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx$, надо к предельному переходу, дающему значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)f(x)dx$, добавить еще один предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Здесь наблюдается своеобразная аналогия с определением несобственного интеграла исходя из известного определения интеграла, мы с помощью дополнительного предельного перехода получаем новое математическое понятие. Конечно, дополнительные предельные переходы в этих случаях различны, это приводит к различным понятиям.

При новом определении символа (61.5) мы находимся в круге привычных нам математических определений, расширяющих запас понятий, с которыми имели дело раньше; нам удалось выявить одно интересное свойство дельта-функции $\delta(t)$ (см. (61.9)): она ставит в соответствие каждой непрерывной функции $f(t)$ число $f(0)$, т. е. дельта-функцию можно рассматривать как функцию, определенную на множестве всех непрерывных функций. Отображения, области определения которых представляют собой некоторые множества функций, называются *функционалами* (ср. с определением 9 в п. 60.8). Дельта-функция является одним из простейших примеров функционалов. Обобщенными функциями, которые упоминались в начале этого пункта, называются функционалы определенного вида (см. п. 61.2).

Как мы видели, свойства дельта-функции определяются свойствами функций $\delta_\varepsilon(x)$. Если взять $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, то получится последовательность функций, которая, как и аналогичные ей в определенном смысле, называется дельта-последовательностью (точное определение дельта-последовательностей будет дано ниже: см. упражнение 7 в п. 61.3). Всякая дельта-последовательность может служить для определения свойства (61.9) дельта-функции. Следует отметить, что мы уже встречались раньше с дельта-последовательностями: примером такой последовательности является последовательность ядер Фейера $\Phi_n(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Однако мы не акцентировали внимания на последовательностях такого рода, поскольку они, не являясь самостоятельным объектом изучения, играли вспомогательную роль.

Теперь перейдем к систематическому изучению обобщенных функций. Отдельные обобщенные функции возникли первоначально в работах П. Дирака и других физиков в качестве символического способа описания определенных физических явлений. Для использования этих понятий в теоретических исследованиях возникла необходимость создания теории обобщенных функций, что и было сделано. Теория обобщенных функций является весьма полезным математическим аппаратом. С ее помощью удалось решить ряд задач, не поддававшихся решению старыми методами. Ныне обобщенные функции широко применяются как в прикладных, так и в чисто математических исследованиях.

В следующих пунктах этого параграфа будут изложены основы общей теории обобщенных функций, построенной С. Л. Соболевым* и Л. Шварцем.

61.2. Линейные пространства со сходимостью. Функционалы. Сопряженные пространства

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество и пусть в совокупности всех последовательностей $\{x_n\}$ его элементов выделен некоторый класс последовательностей, названных сходящимися, и каждой сходящейся последовательности поставлен в соответствие элемент $x \in X$, называемый ее пределом.*

* С. Л. Соболев (1908—1989) — советский математик.

Если при этом выполняются три условия:

1) *каждая последовательность элементов множества X может иметь не более одного предела*;

2) *всякая последовательность вида* $\{x, x, x, \ldots, x, \ldots\}$ *является сходящейся, и ее пределом является элемент* x;

3) *всякая подпоследовательность сходящейся последовательности также является сходящейся и имеет тот же предел*, *что и вся последовательность*;

то множество X называется пространством со сходимостью.

Условия 1), 2) и 3) называются *аксиомами Фреше*.

Если x является пределом последовательности $\{x_n\}$, то, как обычно, пишут

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Определение 2. *Линейное пространство X называется линейным пространством со сходимостью, если оно является пространством со сходимостью*, *относительно которой операции сложения элементов пространства и умножения их на число являются непрерывными*.

Это означает, что для любых сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов из X, имеющих своими пределами соответственно $x \in X$ и $y \in X$, и любых чисел λ и μ последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n \to \infty} \{\lambda x_n + \mu y_n\} = \lambda x + \mu y.$$

Кроме того, если $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность и $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n x = \lambda x$ для любого $x \in X$.

Примером линейных пространств со сходимостью являются нормированные линейные пространства; однако существуют линейные пространства со сходимостью, в которых нельзя ввести норму, порождающую заданную сходимость последовательностей.

Важным для дальнейшего является понятие линейного функционала на пространстве со сходимостью, с которым мы встречались в частном случае линейных нормированных пространств (см. п. 41.6 и 60.8).

Определение 3. *Отображения линейного пространства X во множество действительных чисел* ***R*** (*или во множество комплексных чисел* ***C***) *называются функционалами*, *определенными на этом пространстве*, *или функционалами над этим пространством*.

Значение функционала f в точке x линейного пространства X обозначается через (f, x), т. е. так же, как скалярное произведение элементов f и x в линейном пространстве X со скалярным произведением. Это обозначение оправдывается, в частности, тем, что скалярное произведение (y, x) при фиксированном элементе y является функционалом, определенным на указанном пространстве X.

Определение 4. *Пусть X — линейное пространство. Функционал, определенный на этом пространстве, называется линейным (точнее, линейным однородным), если для любых элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел λ, μ выполняется условие*

$$(f, \lambda x + \mu y) = \lambda (f, x) + \mu (f, y).$$

Определение 5. *Функционал f, определенный на линейном пространстве X со сходимостью, называется непрерывным, если для любой сходящейся последовательности $x_n \in X$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, выполняется условие*

$$\lim_{n \to \infty} (f, x_n) = (f, x).$$

Функционалы, как и всякие числовые функции, можно складывать, умножать друг на друга, в частности на число. Например, если f и g — функционалы, то значение функционала $\alpha f + \beta g$ (α и β — числа) определяется в точке $x \in X$ по формуле

$$(\alpha f + \beta g, x) = \alpha (f, x) + \beta (g, x).$$

ЛЕММА 1. *Линейные непрерывные функционалы образуют линейное пространство.*

Доказательство. Пусть f и g — линейные функционалы, α и β — числа. Покажем, что $\alpha f + \beta g$ — также линейный функционал:

$$(\alpha f + \beta g, \lambda x + \mu y) = \alpha(f, \lambda x + \mu y) + \beta(g, \lambda x + \mu y) =$$
$$= \alpha[\lambda (f, x) + \mu (f, y)] + \beta[\lambda (g, x) + \mu (g, y)] =$$
$$= \lambda [\alpha(f, x) + \beta(g, x) + \mu [\alpha (f, y) + \beta (g, y)] =$$
$$= \lambda (\alpha f + \beta g, x) + \mu (\alpha f + \beta g, y),$$

т. е. $\alpha f + \beta g$ — линейный функционал.

Пусть теперь f и g — непрерывные функционалы. Покажем, что тогда и $\alpha f + \beta g$ — также непрерывный функционал. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha f + \beta g, x_n) = \lim_{n \to \infty} [\alpha (f, x_n) + \beta (g, x_n)] =$$
$$= \alpha \lim_{n \to \infty} (f, x_n) + \beta \lim_{n \to \infty} (g, x_n) = \alpha (f, x) + \beta (g, x) = (\alpha f + \beta g, x).$$

Таким образом, во множестве линейных непрерывных функционалов естественным образом определены операции их сложения и умножения на число. Выполнение для этих операций аксиом линейного пространства проверяется безо всякого труда. □

Любой функционал f, как и всякий линейный оператор (см. п. 58.1), отображает нуль в нуль.

Функционал, принимающий на всех точках пространства значение нуль, называется нулевым функционалом.

Отметим, что если линейный функционал принимает на всех точках пространства одно и то же значение, то это значение равно нулю. Иначе говоря, кроме нулевого, не существует никакого другого линейного функционала, принимающего одно и то же значение на всех точках пространства.

В самом деле, если для всех $x \in X$ имеет место равенство $f(x) = c$, то, в частности, $c = f(0) = 0$.

В линейном пространстве линейных непрерывных функционалов пространства X понятие сходимости последовательностей определяется следующим образом.

Определение 6. *Последовательность функционалов f_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется сходящейся к функционалу f, если последовательность значений функционалов f_n сходится в каждой точке $x \in X$ к значению в ней функционала f, иначе говоря, если для любого элемента $x \in X$ числовая последовательность $\{(f_n, x)\}$ сходится к числу (f, x).*

Таким образом, утверждение $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ равносильно утверждению

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, x) = (f, x) \text{ для всех } x \in X.$$

При таком определении сходимости функционалов операции их сложения и умножения на число непрерывны (это непосредственно следует из линейности функционалов и из свойств пределов числовых последовательностей), и, следовательно, если ввести понятие сходимости функционалов согласно определению 6, то будет справедливым следующее утверждение, которое мы сформулируем в виде отдельной леммы.

ЛЕММА 2. *Линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве со сходимостью, также образуют линейное пространство со сходимостью.*

Определение 7. *Линейное пространство со сходимостью, элементами которого являются линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве X, называется пространством, сопряженным X.*

Как мы знаем, в случае гильбертовых пространств (см. п. 60.8) сопряженное пространство изоморфно самому пространству. В общем случае это не имеет места.

Пусть X и Y — линейные пространства со сходимостью, причем каждый элемент пространства X является элементом пространства Y, и пусть всякая последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся в X к элементу x, сходится к x и в Y. В этом случае будем писать

$$X \subsetneq Y.$$

Определение 8. *Говорят, что линейный непрерывный функционал f, определенный на пространстве $X \subsetneq Y$, продолжаем на пространство Y в линейный непрерывный функционал, если существует такой линейный непрерывный функционал F, определенный на пространстве Y, что $(F, x) = (f, x)$ для всех $x \in X$ (т. е. $F = f$ на X). В этом случае функционал F называется продолжением функционала f.*

УПРАЖНЕНИЕ 1. Пусть X и Y — линейные пространства со сходимостью. Доказать, что если $X \subsetneq Y$ и множество X плотно в пространстве Y (т. е. каждый элемент из пространства Y является пределом в этом пространстве последовательности элементов из X), то всякий линейный непрерывный функционал пространства X, продолжаемый в линейный непрерывный функционал пространства Y, продолжаем единственным образом.

Как и для отображений любых линейных пространств для пространств со сходимостью имеет смысл понятие линейного отображения (линейного оператора) одного пространства со сходимостью в другое такое же пространство (см. определение 7 в п. 58.1). Введем еще понятие непрерывного отображения одного линейного пространства со сходимостью в другое.

Определение 9. *Пусть X_1 и X_2 — два линейных пространства со сходимостью. Отображение Φ пространства X_1 в X_2 называется непрерывным в точке $x_0 \in X_1$, если, какова бы ни была последовательность $x_n \in X_1$, $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся в пространстве X_1 к точке x_0, последовательность $\Phi(x_n) \in \in X_2$, $n = 1, 2, \dots$, сходится в X_2 к элементу $\Phi(x_0)$.*

Иначе говоря, отображение Φ является непрерывным в точке x_0, если из $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0)$.

ЛЕММА 3. *Если линейное отображение Φ линейного пространства со сходимостью X_1 в линейное пространство со сходимостью X_2 непрерывно в нуле пространства X_1, то оно непрерывно и всюду в X_1.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$; тогда $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - x_0) = 0$. В силу непрерывности отображения Φ в нуле,

$$\lim_{n \to \infty} \Phi\,(x_n - x_0) = 0.$$

Так как отображение Φ линейно, то

$$\Phi(x_n - x_0) = \Phi(x_n) - \Phi(x_0)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} [\Phi(x_n) - \Phi(x_0)] = 0,$$

откуда

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0).$$

Таким образом, отображение Φ непрерывно в каждой точке $x \in X$. □

Определение 10. *Отображение Φ линейного пространства со сходимостью X_1 в линейное пространство со сходимостью X_2 называется непрерывным на X_1, если оно непрерывно в каждой точке пространства X_1.*

Для всякого линейного пространства X со сходимостью имеют смысл понятие ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, сходящегося ряда и его суммы. Эти понятия вводятся аналогично случаю линейных нормированных пространств. Это возможно, поскольку в соответствующих определениях из свойств нормы используется лишь то, что во всяком нормированном пространстве определено понятие сходящейся последовательности.

Примеры линейных и непрерывных отображений пространств со сходимостью будут даны в пп. 61.6 и 61.7.

61.3. Определение обобщенных функций. Пространства *D* и *D′*

Определим прежде всего основное для нас линейное пространство функций D. Для этого рассмотрим функции, заданные на множестве всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и принимающие комплексные значения.

Интересующее нас пространство D состоит из бесконечно дифференцируемых финитных функций (определение финитных функций см. в п. 55.2). Все финитные функции при естественным образом определенных операциях их сложения и умножения на число образуют линейное пространство, а бесконечно дифференцируемые финитные функции (которые мы будем называть здесь основными) — его подпространство. Введем в этом подпространстве понятие сходимости последовательностей.

Определение 11. *Последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций* φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *называется сходящейся к бесконечно дифференцируемой финитной функции* φ, *если*:

1) *существует отрезок* $[a, b]$, *вне которого все функции* φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *и* φ *обращаются в нуль**;

2) *на этом отрезке последовательность функций* φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *и последовательности всех их производных* $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots$, *равномерно сходятся соответственно к функции* φ *и к ее производным* $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Совокупность бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью. Это непосредственно следует из свойств пределов функций и свойств равномерно сходящихся последовательностей.

Определение 12. *Пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной сходимостью называется пространством* D *основных функций.*

Очевидно, что если $\varphi \in D$, то и любая производная функция φ принадлежит пространству D.

Заметим еще, что если $\{\varphi_n\}$ сходится к φ в D, то и последовательность $\{\varphi_n^{(k)}\}$ производных любого порядка $k = 1, 2, \ldots$ сходится к $\varphi^{(k)}$ в D. Это непосредственно следует из определения сходимости в пространстве D.

Тривиальным примером функции пространства D является функция, равная нулю на всей оси, менее тривиальным функция (рис. 19)

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-a^2/(a^2 - x^2)}, & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant a. \end{cases} \tag{61.13}$$

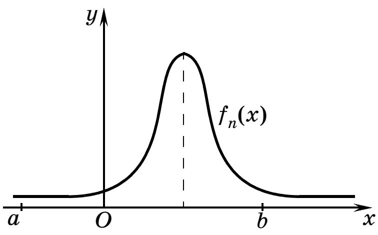


Рис. 19

УПРАЖНЕНИЯ. 2. Доказать, что функция (61.13) бесконечно дифференцируема на всей числовой оси (ср. с (33.25)).

3. Доказать, что для того чтобы для функции $\varphi \in D$ существовала функция $\psi \in D$ такая, что $\varphi = \psi'$, необходимо и достаточно, чтобы $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 0$.

* Отрезок $[a, b]$ содержит носители всех функций φ, φ_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 13. *Всякий линейный непрерывный функционал f, определенный на D, называется обобщенной функцией.*

Определение 14. *Функция f, определенная на всей действительной оси, называется локально интегрируемой, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.*

Если f — локально интегрируемая функция, а $\varphi \in D$, то произведение $f\varphi$ абсолютно интегрируемо на всей оси. Действительно, пусть $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$ (определение носителя $\operatorname{supp} \varphi$ функции φ см. в п. 55.2); функция φ, очевидно, ограничена: $|(\varphi(x)| \leqslant C$, $-\infty < x < +\infty$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)|dx = \int_a^b |f(x)\varphi(x)|dx \leqslant C\int_a^b |f(x)|dx < +\infty,$$

так как функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Определим для локально интегрируемой функции f функционал (f, φ) на D равенством

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx. \qquad (61.14)$$

Этот функционал линеен и непрерывен. Линейность очевидна; докажем непрерывность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в D. Тогда существует такой отрезок $[a, b]$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$, имеют место включения $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [a, b]$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$; поэтому

$$|(f, \varphi) - (f - \varphi_n)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\|\varphi(x) - \varphi_n(x)|dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)\|\varphi(x) - \varphi_n(x)|dx \leqslant \sup_{[a,\,b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int_a^b |f(x)|dx \to 0$$

при $n \to \infty$, так как в силу определения сходимости в пространстве D имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[a,\,b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| = 0.$$

Таким образом, всякой локально интегрируемой функции $f(x)$ соответствует обобщенная функция (f, φ)*, в этом смысле всякую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию. Как мы знаем, не существует линейного функционала, принимающего одно и то же значение, не равное нулю, на всех точках пространства (см. п. 61.2).

---

* В этом случае говорится также, что обобщенная функция (f, φ) порождается функцией f.

Постоянной обобщенной функцией c (в частности, нулевой) называется обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией $f(x) = c$, $-\infty < x < +\infty$. Таким образом, для любой основной функции φ имеет место равенство

$$(c, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} c\varphi(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что две непрерывные на числовой оси функции различны тогда и только тогда, когда различны порожденные ими обобщенные функции.

Иногда обобщенные функции обозначаются символом $f(x)$. Это обозначение чисто символическое; оно отнюдь не обозначает значения обобщенной функции в точке $x \in \boldsymbol{R}$, а отражает лишь тот факт, что обобщенные функции являются в указанном выше смысле обобщением обычных (локально интегрируемых) функций; никакое значение обобщенной функции в точке x здесь не подразумевается. Для обозначения значения обобщенной функции f в точке $\varphi = \varphi(x)$ пространства D наряду с записью (f, φ) употребляется также запись

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx. \tag{61.15}$$

Таким образом, по определению,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx = (f, \varphi).$$

Это равенство является определением символа (61.15), который формально читается как «интеграл от произведения f на φ». Эта запись отражает собой тот факт, что обобщенные функции являются обобщением функционалов (61.14), где f — локально интегрируемая функция.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать, что функционал $v.\,p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$, $\varphi \in D$, является обобщенной функцией $\left(\text{она обычно обозначается } \mathcal{P}\,\frac{1}{x}\right)$.

В качестве другого примера обобщенной функции рассмотрим функционал, который обозначается $\delta = \delta(x)$ и называется δ-функцией (см. п. 61.1).

Определение 15. *Функционал, определяемый формулой*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0),\ \varphi \in D,$$

называется δ-функцией.

Его линейность и непрерывность легко проверяются. Он не может быть представлен в виде (61.14) ни при какой локально

интегрируемой функции f. Действительно, если бы нашлась такая локально интегрируемая функция f, что

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx, \ \varphi \in D,$$

то для этой функции f и для функции φ, заданной формулой (61.13), мы имели бы

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \qquad (61.16)$$

Но, в силу абсолютной интегрируемости функции f,

$$\lim_{a \to 0} \int_{-a}^{a} |f(x)|dx = 0$$

(почему?). Далее, замечая, что $e^{-a^2/(a^2 - x^2)} < \frac{1}{e}$, $-a \leqslant x \leqslant a$, получим

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx\right| = \left|\int_{-a}^{a} f(x)\; e^{-a^2/(a^2 - x^2)}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{e} \int_{-a}^{a} |f(x)|dx,$$

поэтому левая часть равенства (61.16) при $a \to 0$ стремится к нулю, а правая нет. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Таким образом, запас обобщенных функций в указанном смысле больше, чем запас обычных.

Определение 16. *Функционал, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi \in D$ число $\varphi(x_0)$, где x_0 фиксировано, называется δ-функцией и обозначается $\delta(x - x_0)$.*

Применяя запись (59.15), можно написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\,\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \ \varphi \in D.$$

Определение 17. *Совокупность обобщенных функций, как и всякая совокупность функционалов, определенных на линейном пространстве со сходимостью* (см. п. 61.2), *образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное к D. Оно называется пространством обобщенных функций и обозначается D'.*

Таким образом, сходимость последовательности обобщенных функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, к обобщенной функции f означает, что

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in D$.

Задача 7. Пусть $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть для любой функции $\varphi \in D$ существует предел числовой последовательности (f_n, φ). Положим, $F(\varphi) = \lim\limits_{n \to \infty} (f_n, \varphi)$. Доказать, что $F(\varphi)$ является обобщенной функцией.

В п. 61.1 были рассмотрены функции $\delta_\varepsilon(x)$, которые, очевидно, локально интегрируемы. Мы видели, что они обладают тем свойством, что для любой непрерывной на всей оси функции φ и, следовательно, для любой функции $\varphi \in D$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (\delta_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\, \varphi(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

С точки зрения обобщенных функций это означает, что в D'

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \delta_\varepsilon = \delta.$$

Таким образом, δ-функция в пространстве D' является пределом последовательности обобщенных функций, порожденных локально интегрируемыми функциями.

УПРАЖНЕНИЯ. 6. Найти предел $\lim\limits_{n \to \infty} \cos nx$ в пространстве D'.

7. Пусть последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что:

а) каково бы ни было число $M > 0$ при $|a| < M$, $|b| < M$, величины

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx \right|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ограничены постоянной, не зависящей от a, b, n (она зависит только от M);

б) при любых фиксированных a и b, отличных от нуля,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a < b < 0 \text{ и } 0 < a < b, \\ 1 & \text{при} \quad a < 0 < b. \end{cases}$$

Такие последовательности $f_n(x)$ (рис. 20) называются *дельта-последовательностями.*

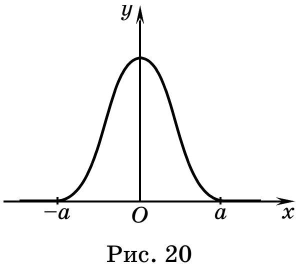


Рис. 20

Доказать, что для любой непрерывной функции φ и любой дельта-последовательности $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, \varphi(x) dx = \varphi(0);$$

иначе говоря,

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (\delta, \varphi).$$

8. Пусть $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/t}$. Доказать, что в пространстве D' справедливо равенство $\lim\limits_{t \to +0} f_t(x) = \delta(x)$.

9. Доказать, что в пространстве D' существует предел $\lim\limits_{y \to 0} \frac{1}{x \pm iy}$ $\Big($он обозначается $\frac{1}{x \pm i0}\Big)$ и что справедливы формулы

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\,\pi\delta + \mathscr{P}\,\frac{1}{x}$$

(они называются формулами Сохоцкого*).

Задача 8. Доказать, что всякая обобщенная функция является пределом обобщенных функций, порожденных локально интегрируемыми функциями.

В этом смысле пространство обобщенных функций является «пополнением» пространства обычных (локально интегрируемых) функций.

Как мы видели, понятие обобщенной функции не сводится к понятию функции точки, и поэтому говорить о значении обобщенной функции в данной точке, в частности обращении ее в нуль в этой точке, вообще говоря, не имеет смысла. Однако можно ввести естественное понятие обращения в нуль обобщенной функции на интервале.

Определение 18. *Будем говорить, что обобщенная функция* f *обращается в нуль на интервале* (a, b), *если* $(f, \varphi) = 0$ *для всех* $\varphi \in D$, *которые имеют носитель, содержащийся в интервале* (a, b).

УПРАЖНЕНИЕ 10. Доказать, что для того чтобы непрерывная функция обращалась в нуль в каждой точке интервала, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль на этом интервале как обобщенная функция.

Определение 19. *Обобщенные функции* f *и* g *называются равными на интервале* (a, b), *если* $f - g = 0$ *на* (a, b).

61.4. Дифференцирование обобщенных функций

Определим теперь производную обобщенной функции. Выясним прежде всего, что представляет собой производная обычной непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции f, рассматриваемая как функционал (f', φ) на D. Это имеет смысл, поскольку производная f', будучи непрерывной на всей числовой оси, является локально интегрируемой функцией.

---

* Ю. Сохоцкий (1842—1929) — русский математик.

Интегрируя по частям, в силу финитности функции $\varphi \in D$, получим

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)dx = -(f, \varphi'), \qquad (61.17)$$

причем, как известно, $\varphi' \in D$. Таким образом, производная f' является функционалом на D, значения которого выражаются через значения функции f, рассматриваемой как функционал, с помощью формулы (61.17). Это делает естественным следующее определение.

Определение 20. *Производной обобщенной функции f называется функционал на D, обозначаемый f' и определяемый равенством*

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'),\ \varphi \in D. \qquad (61.18)$$

Иначе говоря, значение функционала f' в любой точке φ пространства D равно значению функционала f в точке $\varphi' \in D$, взятому с противоположным знаком.

Таким образом, любая обобщенная функция имеет производную. Отсюда следует, что и любая локально интегрируемая функция имеет в смысле определения 20 производную!

Из формулы (61.17) следует, что производная в обычном смысле непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции, рассматриваемая как функционал над D, совпадает с ее производной в смысле обобщенных функций.

Операцию вычисления производной обобщенной функции называют по аналогии со случаем обычных функций дифференцированием.

ЛЕММА 4. *Функционал f' является линейным непрерывным функционалом и, следовательно, обобщенной функцией.*

Доказательство. Проверим линейность:

$$(f', \lambda\varphi + \mu\psi) = -(f', (\lambda\varphi + \mu\psi)') = -(f, \lambda\varphi' + \mu\psi') =$$
$$= -\lambda\,(f, \varphi') - \mu\,(f, \psi') = \lambda\,(f', \varphi) + \mu(f', \psi),\ \varphi \in D,\ \psi \in D.$$

Для того чтобы проверить непрерывность функционала f, вспомним, что если $\varphi \in D$, $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ в D, то, в силу определения сходимости в пространстве D, и $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi'_k = \varphi'$ в D; поэтому, если $\varphi_k \to \varphi$ в D, то $\lim\limits_{k\to\infty} (f', \varphi_k) = -\lim\limits_{k\to\infty} (f, \varphi'_k) = -(f, \varphi') = (f', \varphi)$.

Таким образом, если $f \in D'$, то f' всегда существует и $f' \in D'$. □

Производные высших порядков обобщенной функции определяются последовательно, как и для обычных функций:

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \dots ,$$

вообще

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})', \quad k = 1, 2, \dots , f^{(0)} = f.$$

По индукции легко проверить, что

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \varphi \in D, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Согласно этому определению, обобщенные функции имеют производные любых порядков, или, как иногда говорят, бесконечно дифференцируемы.

Наряду с обозначениями производных обобщенных функций f символами f', $f^{(k)}$ употребляются равнозначные обозначения $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^R f}{dx^k}$, $k = 1, 2, \dots$.

Примеры. 1. Пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Функция $\theta(x)$ называется *функцией Хевисайда* (см. (61.10)) или *единичной функцией*. Она локально интегрируема и поэтому может рассматриваться как обобщенная функция. Найдем ее производную. Согласно определению (61.18),

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, \varphi'(x) dx =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \ \varphi \in D,$$

т. е. $\theta' = \delta$.

В смысле обычной производной при любом $x \neq 0$ имеет место $\theta'(x) = 0$, а при $x = 0$ производная функции $\theta(x)$ бесконечна: $\theta'(0) = +\infty$. Поэтому, согласно равенству $\theta' = \delta$, иногда говорят, что функция δ равна нулю всюду на числовой оси, кроме точки $x = 0$, где она равна $+\infty$ (ср. с п. 61.1). Хотя это высказывание не является логически строгим, так как функция Дирака δ не есть обычная функция и поэтому нельзя говорить о ее значениях в отдельных точках, оно бывает иногда удобным при правдоподобных рассуждениях.

2. В качестве другого примера вычислим производные δ-функции:

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

УПРАЖНЕНИЯ. 11. Пусть f и g — обобщенные функции, λ и μ — числа. Доказать, что $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$, т. е. что оператор дифференцирования является линейным оператором на множестве обобщенных функций.

12. Доказать, что в пространстве обобщенных функций:

а) $|x|' = \operatorname{sign} x$;

б) $x_+' = \theta$, где $x_+ = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

13. Доказать, что $\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)\theta(x)\, e^{-\lambda x} = \delta(x)$.

14. Доказать, что $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\frac{\theta(x)\sin \omega x}{\omega} = \delta(x)$.

15. Если $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ при } |x| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 \text{ при } |x| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \end{cases}$ то в пространстве обобщенных функций

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x) \text{ и } \delta'_\varepsilon(x) = \frac{\delta(x + \varepsilon/2) - \delta(x - \varepsilon/2)}{\varepsilon}.$$

16. Пусть $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ при } x < x_0, \\ f_2(x) \text{ при } x > x_0, \end{cases}$ где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ (следовательно, в частности, существуют пределы $f'(x_0 \pm 0)$). Найти производную $f'(x)$ в пространстве D'.

17. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на всей числовой оси. Найти производную $(\theta f)'$ в пространстве D'.

18. Доказать, что если f — кусочно-непрерывно дифференцируемая функция, имеющая в точках $x_1, \ldots, x_n$ разрывы первого рода со скачками $p_1, \ldots, p_n$, то

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k),$$

где f' — обобщенная, $\frac{df}{dx}$ — обычная при $x \neq x_k$ производная, $k = 1, 2, \ldots, n$.

ЛЕММА 5. *Пусть* $f_n \in D'$, $f \in D'$ *и*

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f; \tag{61.19}$$

тогда и

$$\lim_{n \to \infty} f_n' = f', \tag{61.20}$$

т. е. для любой сходящейся в D' последовательности обобщенных функций производная предельной функции равна пределу последовательности производных.

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in D$ имеем $(f', \varphi) - (f_n', \varphi) = [(f, \varphi') - (f_n, \varphi')] \to 0$ при $n \to \infty$, так как $\varphi' \in D$. □

Последовательно применив лемму 5, получим, что из сходимости последовательности обобщенных функций следует сходимость последовательностей производных всех порядков обобщенных функций рассматриваемой последовательности.

Можно рассматривать и ряды обобщенных функций

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{61.21}$$

где $u_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$. Сумма

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

называется *частичной суммой n-го порядка* ($n = 1, 2, \ldots$) ряда (61.21). Ряд (61.21) называется сходящимся, если в D' существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$.

Обобщенную функцию s называют суммой ряда (61.21); при этом пишут

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

ЛЕММА 6. *Сходящийся ряд обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз: если* $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *то*

$$s^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Это следует из леммы 5.

УПРАЖНЕНИЯ. 19. Доказать, что в пространстве обобщенных функций D' справедливо равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Указание. Воспользоваться формулой (см. пример 3 в п. 55.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

20. Доказать, что в пространстве D' справедлива формула $\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$ (см. упражнение 5).

61.5. Пространство основных функций *S* и пространство обобщенных функций *S′*

Обозначим через S множество всех бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси комплекснозначных функций, которые вместе со всеми своими производными стремятся к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени $1/x$. Иначе говоря,

множество S состоит из тех и только тех бесконечно дифференцируемых функций φ, для которых при любых целых неотрицательных n и m выполняется условие

$$\lim_{x \to \infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0. \tag{61.22}$$

Условие принадлежности функции φ к множеству S можно сформулировать и несколько иначе: бесконечно дифференцируемая функция φ принадлежит S тогда и только тогда, когда для любых целых неотрицательных n и m имеем

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| x^n \varphi^{(m)}(x) \right| = c_{n,\,m} < \infty. \tag{61.23}$$

Действительно, если это так, то, заменяя в (61.23) n на $n + 1$, получим $\left| x^{n+1} \varphi^{(m)}(x) \right| \leqslant c_{n+1,\,m}$, поэтому

$$\left| x^n \varphi^{(m)}(x) \right| \leqslant \frac{c_{n+1,\,m}}{|x|},$$

откуда и следует (61.22).

Наоборот, если выполнено условие (61.22), то функция $x^n \varphi^{(m)}(x)$, имея конечный предел в бесконечной удаленной точке ∞, будет ограничена на некоторой ее окрестности $U(\infty) = \{x : |x| > a > 0\}$. Будучи же непрерывной, функция $x^n \varphi^{(m)}(x)$ ограничена и на отрезке $[-a,\ a] = R \setminus U(\infty)$. Таким образом, функция $x^n \varphi^{(m)}(x)$ ограничена на всей числовой прямой $\boldsymbol{R}$ и, следовательно, для нее существует постоянная $c_{n,\,m}$, удовлетворяющая условию (61.23).

Очевидно, что множество S является линейным пространством. При этом если $\varphi \in S$, то и любая производная функции φ принадлежит пространству S.

Определение 21. *Последовательность функций $\varphi_k(x) \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, называется сходящейся в S к функции $\varphi(x) \in S$, если для всех целых неотрицательных n и m каждая последовательность $x^n \varphi_k^{(m)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно на всей оси сходится к функции $x^n \varphi^{(m)}(x)$.*

Очевидно, что $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi$ в S тогда и только тогда, когда при любых целых неотрицательных n и m

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} \left| x^n [\varphi_k^{(m)} - \varphi^{(m)}(x)] \right| = 0. \tag{61.24}$$

Отметим, что если $\varphi_k \to \varphi$ в S, то для производных любого порядка $\varphi_k^{(m)} \to \varphi^{(m)}$ в S, $m = 1, 2, \ldots$. Линейное пространство S с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью.

Очевидно, что $D \subsetneq S$, в частности, последовательность функций $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся в D к функции φ, схо-

дится к функции φ и в S. Вместе с тем $D \neq S$, так как $e^{-x^2} \in S$, но $e^{-x^2} \notin D$.

Задача 9. Доказать, что пространство D плотно в S, т. е. что любая функция $\varphi \in S$ является пределом в S некоторой последовательности функций $\varphi_k \notin D$, $k = 1, 2, \ldots$.

Определение 22. Линейный *непрерывный функционал, определенный на пространстве S, называется обобщенной функцией медленного роста. Множество всех таких функционалов называется пространством обобщенных функций медленного роста и обозначается S'.*

Каждый функционал $f \in S'$, рассматриваемый только на множестве D, является обобщенной функцией, следовательно, элемент множества S' можно интерпретировать как продолжение некоторого линейного непрерывного функционала с множества D на S (см. п. 61.2). Например, функционал δ, определенный нами в п. 61.3 на пространстве D формулой $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, может быть продолжен с помощью той же формулы на пространство S.

Можно показать, что не всякая обобщенная функция из D' продолжаема на S, в этом смысле можно сказать, что S' составляет строгую часть D'.

УПРАЖНЕНИЕ 21. Доказать, что обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией e^x, не продолжаема в элемент пространства S'.

Всякая локально интегрируемая функция $f(x)$, для которой в некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$|f(x)| \leqslant A\,|x|^k \qquad (61.25)$$

(A и k — неотрицательные постоянные)*, в частности, любой многочлен порождает функционал пространства D, продолжаемый в линейный непрерывный функционал на S. Он определяется формулой

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx, \quad \varphi \in S. \qquad (61.26)$$

Действительно, из условий (61.22) и (61.25) следует, что $f(x)\,\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$ быстрее любой степени $1/x$ и, следовательно, интеграл (61.26) существует.

---

* Такие функции называются *функциями медленного роста*, откуда и термин «обобщенные функции медленного роста».

Заметим еще, что всякая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция $f(x)$ также порождает по формуле (61.26) линейный непрерывный функционал над S. Действительно, так как всякая функция $\varphi \in S$ ограничена, то в этом случае существование интеграла (61.26) следует из неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\,\varphi(x)|dx \leqslant \sup_{-\infty<x<+\infty} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx.$$

УПРАЖНЕНИЯ. 22. Доказать, что функционал (61.26) линеен и непрерывен на пространстве S (как в случае, когда функция f медленного роста на бесконечности, так и в случае, когда она абсолютно интегрируема на всей числовой оси).

23. Доказать, что обобщенная функция $\frac{1}{x+i0} \in D'$ (см. упражнение 9) продолжаема в элемент пространства S'.

Множество S' образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное с S (см. п. 61.2).

Так как для любой функции $\varphi \in S$ будем иметь $\varphi' \in S$, то для обобщенных функций пространства S', как и для обобщенных функций из D', можно определить производную f' по формуле

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in S.$$

Таким образом, для любой обобщенной функции $f \in S'$ производная f' всегда существует и $f' \in S'$. При этом на элементе $\varphi \in D$ производные обобщенной функции f, рассматриваемые соответственно как производные в пространствах D' и S', совпадают. Как и в случае пространства D', в пространстве S' производная от предела всегда существует и равна пределу производных.

Полагая $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, $n = 1, 2, \ldots$, как и для обобщенных функций из пространства D', получим

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}),\ f \in S',\ \varphi \in S,\ n = 1, 2, \ldots .$$

61.6. Преобразование Фурье в пространстве *S*

Каждая функция $\varphi \in S$ абсолютно интегрируема. Более того, если $\varphi \in S$, то при любом $k = 1, 2, \ldots$ функция $x^k\varphi(x)$ также абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Действительно, так как для функции $\varphi \in S$ выполняется условие (61.23), то

$$|x^{(k)}\,\varphi(x)| \leqslant c_{k,0},$$

$$x^2|x^{(k)}\,\varphi(x)| = |x^{k+2}\varphi(x)| \leqslant c_{k+2,0},$$

поэтому

$$|x^{(k)}\,\varphi(x)| \leqslant \frac{c_{k,0} + c_{k+2,0}}{1+x^2}. \tag{61.27}$$

В правой части (61.27) стоит абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция; следовательно, по признаку сравнения для несобственных интегралов, функция $x^{(k)}\,\varphi(x)$ также абсолютно интегрируема при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для функций $\varphi \in S$ существует классическое преобразование Фурье

$$\hat{\varphi} = F[\varphi]\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ixy} dx, \quad \varphi \in S, \tag{61.28}$$

а также обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, e^{ixy} dy, \quad \varphi \in S.$$

Классичность преобразования Фурье здесь понимается в том смысле, что написанные интегралы являются обычными абсолютно сходящимися интегралами, а не интегралами в смысле главного значения (см. п. 56.3). При этом на S справедливы формулы обращения для прямого и обратного преобразования Фурье (см. п. 56.5):

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi,\ F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi,\ \varphi \in S. \tag{61.29}$$

Отметим, что, например, вторая из этих формул в интегральной форме принимает вид

$$F^{-1}[\hat{\varphi}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(y)\, e^{ixy} dy = \varphi(x).$$

ТЕОРЕМА 1. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают взаимно-однозначно, линейно и непрерывно пространство S на себя.*

Доказательство. Покажем, что если $\varphi \in S$, то и $\hat{\varphi} \in S$.

Прежде всего, из того, что для каждой функции $\varphi \in S$ при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ функция $x^k\varphi(x)$ является, как показано выше, абсолютно интегрируемой на всей числовой оси, следует, согласно теореме 4 из п. 56.10, что преобразование Фурье $\hat{\varphi} = F[\varphi]$ функции φ существует и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию.

Оценим теперь функцию $|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)|$, где n и m — целые неотрицательные числа. Применяя формулы для производной преобразования Фурье (см. п. 56.10) и для преобразования Фурье производной (см. п. 56.8), получим

$$|y^n\, \hat{\varphi}^{(m)}(y)| = |y^n\, F^{(m)}[\varphi]| = |y^n\, F[x^m\, \varphi]| =$$

$$= |F[(x^m\, \varphi)^{(n)}]| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^m\, \varphi(x))^{(n)}\, e^{-ixy} dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(x^m\, \varphi(x))^{(n)}| dx.$$

Заметим, что выражение $[(x^m\,\varphi\,(x)]^{(n)}$, в силу правил дифференцирования, представляет собой линейную комбинацию выражений вида $x^p\,\varphi^{(q)}\,(x)$, где p и q — неотрицательные целые и, как это было отмечено выше, $\varphi^{(q)} \in S$. Поэтому (см. (61.27)) функции $(1 + x^2)x^p\,\varphi^{(q)}\,(x)$ ограничены на всей числовой оси, следовательно, ограничена и функция $(1 + x^2)\,[x^m\,\varphi\,(x)]^{(n)}$, т. е.

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} (1 + x^2)\,\left|[(x^m\,\varphi\,(x)]^{(n)}\right| < +\infty.$$

Разделим и умножим теперь получившееся выше подынтегральное выражение на $1 + x^2$, тогда, принимая во внимание, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$, получим

$$\left|y^n\,\hat{\varphi}^{(m)}\,(y)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x (1 + x^2)\,\left|(x^m\,\varphi\,(x))^{(n)}\right| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1 + x^2)\,\left|(x^m\,\varphi\,(x))^{(n)}\right|. \qquad (61.30)$$

Поскольку справа стоит конечная величина, то $\hat{\varphi} \in S$.

Итак, преобразование Фурье отображает S в S, при этом это отображение взаимно-однозначно (см. лемму 3 п. 56.5).

Аналогично доказывается и то, что обратное отображение Фурье F^{-1} отображает S в S и притом взаимно-однозначно. Таким образом, отображения F и F^{-1} отображают пространство S на себя, т. е. являются биекциями. Это сразу следует из формул взаимности (61.29) для прямого и обратного преобразований Фурье.

Действительно, покажем, например, что $F(S)$ совпадает со всем пространством S. Пусть $\psi \in S$, положим $\varphi = F^{-1}\,[\psi]$. Тогда

$$F[\varphi] = F[F^{-1}\,[\psi]] = \psi.$$

Подобным же образом доказывается и то, что

$$F^{-1}(S) = S.$$

Линейность преобразования Фурье отмечалась раньше (см. лемму 2 в п. 56.5).

Докажем теперь непрерывность отображения F.

Сначала покажем его непрерывность в нуле. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ в S. Тогда из (61.30) следует, что

$$\left|y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}\,(y) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1 + x^2)\,\left|(x^m\,\varphi_k(x))^{(n)}\right|,\ k = 1, 2, \ldots .\right.$$

Но из (61.24) (при $\varphi(x) = 0$) имеем

$$\lim_{k \to \infty} \sup_x (1 + x^2) \left|(x^m \varphi_k(x))^{(n)}\right| = 0;$$

поэтому

$$\lim_{k \to \infty} \sup_y \left|y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y)\right| = 0 \text{ и при } n = m = 0 \lim_{k \to \infty} \hat{\varphi}_k = 0 \text{ в } S.$$

Поскольку преобразование Фурье является линейным отображением линейного пространства S в себя, непрерывным в нуле, оно непрерывно и во всех точках этого пространства (см. лемму 3 в п. 61.2).

Таким образом, преобразование Фурье F непрерывно отображает S на S.

Совершенно аналогично доказывается непрерывность обратного преобразования Фурье F^{-1}. □

61.7. Преобразование Фурье обобщенных функций

Предварительно докажем одно интегральное равенство. Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси и пусть $\varphi \in S$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ixy}dx. \qquad (61.31)$$

Это следует из теоремы 7 п. 54.3. Действительно, повторный интеграл, стоящий слева, существует, так как существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy}dy\right| dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|dy.$$

Если $[a, b]$ — произвольный отрезок, то функция f, в силу ее непрерывности, ограничена на $[a, b]$: $|f(y)| \leqslant M$; поэтому

$$\left|f(y)\, \varphi(x)\, e^{-ixy}\right| \leqslant M\, |\varphi(x)|,\ a \leqslant y \leqslant b.$$

Отсюда, в силу сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)|dx$, следует равномерная сходимость интеграла $f(y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ixy}dx$ на отрезке $[a, b]$.

Далее, $|\varphi(x)| \leqslant c_{0,0}$, $-\infty < x < +\infty$ (см. (61.23)); поэтому $|\varphi(x) f(y)\, e^{-ixy}| \leqslant c_{0,0}|f(y)|$, и так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|dy$ сходится, то интеграл

$$\varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy}dy$$

равномерно сходится на всей оси.

Наконец, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)\, f(y)\, e^{-ixy}|\, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, dy$$

конечен, поэтому в рассматриваемом случае выполнены все условия теоремы 7 п. 54.3 и, следовательно, можно переставить порядок интегрирования. Равенство (61.31) доказано.

Если функция $F[f]$ порождает некоторый функционал на S (например, удовлетворяет условию (61.25) или абсолютно интегрируема на всей числовой оси), то, умножив равенство (61.31) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, получим

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]),\ \varphi \in S. \tag{61.32}$$

Эту формулу и примем за определение преобразования Фурье обобщенных функций из пространства S'.

Определение 23. *Преобразованием Фурье обобщенной функции* $f \in S$ *называется функционал* $F[f]$, *определяемый формулой* (61.32).

Итак, для любой обобщенной функции f из S' определено ее преобразование Фурье $F[f]$: значение функционала $F[f]$ в любой точке пространства S равно значению функционала f в точке $F[\varphi] \in S$. Преобразование Фурье обобщенной функции будем, как и в случае обычных функций, обозначать также и символом $\hat{f}$.

Пример 1. Найдем преобразование Фурье единицы, рассматриваемой как обобщенная функция. Очевидно, $1 \in S'$. Имеем

$$(\hat{1}, \varphi) = (1, \hat{\varphi}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ixy} dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-iy(t-x)} dx\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\ F^{-1}(F(\varphi))\big|_{t=0} = \sqrt{2\pi}\ \varphi(t)\big|_{t=0} = \sqrt{2\pi}\ \varphi(0) = \sqrt{2\pi}\ (\delta, \varphi)$$

(мы воспользовались здесь леммой 3 п. 56.5). Таким образом, $\hat{1} = \sqrt{2\pi}\ \delta$.

Отметим, что преобразование Фурье $F[\varphi]$ функции $\varphi \in D$, вообще говоря, не принадлежит пространству D, поскольку $F[\varphi]$ не всегда является финитной функцией. Поэтому формула (61.32) имеет смысл не для всех $f \in D'$. Из-за этого обсто-

ятельства при рассмотрении преобразования Фурье обобщенных функций нам и пришлось сузить класс обобщенных функций, введенных раньше, ограничившись только обобщенными функциями медленного роста.

Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции f будем обозначать также символом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy} dx.$$

Таким образом, равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy} dx = F[f] \qquad (61.33)$$

в случае, когда f — обобщенная функция, является определением символа, стоящего в левой части этого равенства.

Определив преобразование Фурье для всех обобщенных функций из S', мы, в частности, определили и преобразование Фурье для обычных функций f, удовлетворяющих условию (61.25), т. е. функций существенно более широкого класса, чем это было сделано раньше (см. пп. 56.5 и 60.9*). Это является одним из весьма существенных обстоятельств, оправдывающих целесообразность введения понятия обобщенных функций.

Покажем, что преобразование Фурье обобщенных функций обладает рядом свойств, аналогичных свойствам классического преобразования Фурье, т. е. преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций.

ЛЕММА 7. *Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции $f \in S'$ также является обобщенной функцией класса S', т. е. $F[f]$ — линейный и непрерывный функционал над пространством S.*

Доказательство. Проверим линейность преобразования Фурье, т. е. покажем, что, какова бы ни была обобщенная функция $f \in S'$, для любых функций $\varphi \in S$, $\psi \in S$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство

$$(F[f], \lambda\varphi + \lambda\mu) = \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[f], \psi).$$

Действительно,

$$(F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) = (f, F[\lambda\varphi + \mu\psi]) =$$
$$= (f, \lambda F[\varphi] + \mu F[\psi]) = \lambda(f, F[\varphi]) + \mu\,(f, F[\psi]) =$$
$$= \lambda\,(F[f], \varphi) + \mu\,(F[f], \psi).$$

Проверим непрерывность преобразования Фурье. Пусть $f \in S'$, $\varphi \in S$, $\varphi_n \in S$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$ и, следовательно (см. теорему 1 п. 61.6), в силу непрерывности преобразования Фурье на пространстве S,

$$\lim_{n \to \infty} F[\varphi_n] = F[\varphi].$$

Тогда, в силу непрерывности функционала f на S, получим

$$\lim_{n \to \infty} (F[f], \varphi_n) = \lim_{n \to \infty} (f, F[\varphi_n]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi].$$

Итак, мы показали, что если $f \in S'$, то и $F[f] \in S'$. □

Естественно определяется и обратное преобразование Фурье $F^{-1}[f]$ элемента $f \in S'$ как функционал пространства S', задаваемый формулой

$$(F^{-1}[f], \varphi) = (f, F^{-1}[\varphi]), \quad f \in S.$$

Если f — абсолютно интегрируемая непрерывная функция, это равенство выполняется для нее в обычном смысле. Это проверяется так же, как и в случае формулы (61.31). По определению, полагается также (ср. (61.33))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy} dx = F^{-1}[f]. \tag{61.34}$$

Как и в случае прямого преобразования Фурье F, показывается, что если $f \in S'$, то и $F^{-1}[f] \in S'$.

ТЕОРЕМА 2. *Преобразование Фурье F и обратное преобразование Фурье F^{-1} отображают линейно, взаимно-однозначно и непрерывно пространство S' на себя; при этом для любого элемента $f \in S'$ справедливы равенства*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f. \tag{61.35}$$

Доказательство. Докажем сначала формулы (61.35). Для любого элемента $\varphi \in S$ имеем

$$(F^{-1}[F[f]], \varphi) = (F[f], \ F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]] = (f, \varphi).$$

Аналогично

$$(F[F^{-1}[f]], \varphi) = (F^{-1}[f], \ F[\varphi]) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (f, \varphi).$$

Покажем теперь, что преобразование Фурье F отображает пространство S' на все пространство $S' : F(S') = S'$. Пусть $g \in S'$, тогда если $f = F^{-1}[g]$, то $F[f] = F[F^{-1}[g]] = g$, т. е. в любой элемент из S' при преобразовании Фурье F отображается некоторый элемент из S'.

Покажем, что F взаимно-однозначно. Если $f_1 \in S'$, $f_2 \in S'$ и $F[f_1] = F[f_2]$, то и $F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]]$, откуда, в силу (61.35), имеем $f_1 = f_2$.

Покажем, что отображение F линейно, т. е. для любых обобщенных функций $f \in S'$, $g \in S'$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство

$$F[\lambda f + \mu g] = \lambda F[f] + \mu F[g].$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, проверим его для любого, но фиксированного элемента $\varphi \in S'$:

$$(F[\lambda f + \mu g], \varphi) = (\lambda f + \mu g, F[\varphi]) = \lambda(f, F[\varphi]) + \mu(g, F[\varphi]) =$$
$$= \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[g], \varphi) = (\lambda F[f] + \mu\, F[g], \varphi).$$

Наконец, докажем, что F является непрерывным отображением. Действительно, пусть $f \in S'$, $f_n \in S'$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ и, следовательно, для любого $\varphi \in S$ справедливо равенство $\lim\limits_{n \to \infty} (f_n \varphi) = (f, \varphi)$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} (F[f_n], \varphi) = \lim_{n \to \infty} (f_n, F[\varphi]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

Аналогично доказывается, что и F^{-1} непрерывно взаимно-однозначно отображает S' на S'. □

Пример 2. Найдем $F[\delta] = \hat{\delta}$. Имеем

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}\,(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-ixy} dx\Big|_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi\right), \ \varphi \in S,$$

поэтому $F[\delta] = 1/\sqrt{2\pi}$ и, следовательно, $F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\ \delta$ (заметим, что обратное классическое преобразование Фурье $F^{-1}[1]$, так же как и прямое $F[1]$, не существуют). С помощью интегралов (61.33) и (61.34) эти формулы можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, e^{-ixy} dx = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} dx = \delta(y).$$

Подобным же образом находится и обратное преобразование Фурье δ-функции:

$$F^{-1}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = F[\delta],$$

отсюда

$$F[1] = F^{-1}\,[1] = \sqrt{2\pi}\ \delta.$$

Используя способ записи, основанный на равенствах (61.33) и (61.34), эти формулы можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}dx = \delta(y), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, e^{ixy}dx = 1.$$

Вычислим далее преобразование Фурье производной обобщенной функции и производную от преобразования Фурье. Предварительно нам придется ввести понятие произведения обобщенной функции $f \in S'$ на обычную бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(x)$, обладающую тем свойством, что для любой ее производной $\psi^{(n)}(x)$ существуют постоянные $\beta_n > 0$ и $\alpha_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$, такие, что для всех x справедливо неравенство

$$|\psi^{(n)}(x)| \leqslant \beta_n(1 + |x|)^{\alpha_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots^{*}. \tag{61.36}$$

Заметим, что все многочлены удовлетворяют этому условию.

Если функция ψ типа (61.36) и $\varphi \in S$, то $\psi\varphi \in S$. Если функция f локально суммируема и удовлетворяет условию (61.25), а функция ψ — условию (61.36), то ψf также удовлетворяет условию (61.25) и

$$(f, \psi\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \psi(x)\, \varphi(x)dx = (\psi f, \varphi).$$

Пусть ψ удовлетворяет условию (61.36), а $f \in S'$. Определим теперь функционал на S, равный произведению ψf, формулой

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \varphi \in S.$$

Легко проверить, что $\psi f \in S'$**, т. е. что ψf является линейным непрерывным функционалом, определенным на пространстве S.

УПРАЖНЕНИЕ 24. Пусть функция $\psi = \psi(x)$ удовлетворяет условию (61.36), а обобщенная функция $f \in S'$. Доказать, что $\psi f \in S'$.

Докажем в заключение формулы

$$F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f], \tag{61.37}$$

$$i^n F^{(n)}[f] = F[x^n f], \quad f \in S'. \tag{61.38}$$

---

* В силу этого условия (при $n = 0$), можно рассматривать $\psi\,(x)$ как обобщенную функцию пространства S' (см. (61.25).

**Затруднения при определении произведения обобщенных функций связаны с тем, что произведение линейных функционалов в обычном смысле как произведение функций (т. е. как произведение значений сомножителей в каждой точке) не является линейным функционалом.

Имеем (см. п. 56.10)

$$(F[f^{(n)}], \varphi) = (f^{(n)}, F[\varphi]) = (-1)^n (f, F^{(n)}[\varphi]) =$$

$$= (-1)^n \left(f, \frac{1}{i^n} F[x^n \varphi]\right) = i^n (F[f], x^n \varphi) = ((ix)^n F[f], \varphi), \ \varphi \in S.$$

Формула (61.37) доказана.

Докажем (61.38) (см. п. 56.8):

$$(F^{(n)}[f], \varphi) = (-1)^n (F[f], \varphi^{(n)}) = (-1)^n (f, F[\varphi^{(n)}]) =$$

$$= (-1)^n (f, (ix)^n F[\varphi]) = \frac{1}{i^n} (x^n f, F[\varphi]) = \left(\frac{1}{i^n} F[x^n f], \varphi\right). \square$$

Пример 3. Найдем преобразование Фурье функции $f(x) = x$. Заметив, что $F(1) = \delta\sqrt{2\pi}$ (см. пример 1), получим

$$F[x] = F[x \cdot 1] = iF'[1] = i\sqrt{2\pi}\ \delta'.$$

УПРАЖНЕНИЕ 25. Найти преобразование Фурье многочлена.

При вычислении преобразования Фурье обобщенных функций иногда удобно выбрать последовательность обычных функций, стремящихся в пространстве S' к заданной (обобщенной) функции, найти преобразование Фурье членов этой последовательности, а затем вычислить искомое преобразование Фурье заданной функции с помощью предельного перехода, используя непрерывность преобразования Фурье. Так, например, для того чтобы вычислить преобразование Фурье $F[\theta]$ функции Хевисайда $\theta(x)$, найдем сначала преобразование Фурье функции $\theta(x)\, e^{-tx}$ $(t > 0)$.

$$F[\theta(x)\, e^{-tx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+iy)} dx =$$

$$= -\frac{e^{-x(t+iy)}}{\sqrt{2\pi}(t+iy)}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t+iy)} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}. \qquad (61.39)$$

Покажем теперь, что в S'

$$\lim_{t \to +0} \theta(x)\, e^{-tx} = \theta(x). \qquad (61.40)$$

Действительно, для каждой функции $\varphi \in S$ и любого числа A имеем

$$\left|(\theta(x), \varphi(x)) - (\theta(x)\, e^{-tx}, \varphi(x))\right| = \left|\int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx})\, \varphi(x) dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^{A} (1 - e^{-tx})\, \varphi(x) dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} (1 - e^{-tx})\, \varphi(x) dx\right|. \qquad (61.41)$$

Зафиксируем функцию $\varphi \in S$ и какое-либо число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости функции φ, существует число $A > 0$, такое, что

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

тогда

$$\left|\int_A^{+\infty} (1 - e^{-tx})\,\varphi(x)dx\right| \leqslant \int_A^{+\infty} |\varphi(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (61.42)$$

Выберем теперь $t_0 > 0$ так, чтобы при $0 < t < t_0$ было справедливо неравенство

$$(1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$\left|\int_0^A (1 - e^{-tx})\,\varphi(x)dx\right| < (1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (61.43)$$

Тогда при $0 < t < t_0$ из (59.41), (59.42) и (59.43) получим

$$|(\theta(x), \varphi(x)) - (\theta(x)\,e^{-tx}, \varphi(x))\,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Формула (61.40) доказана.

В силу непрерывности преобразования Фурье,

$$\lim_{t \to +0} F[\theta(x)\,e^{-tx}] = F[\theta(x)]; \qquad (61.44)$$

отсюда и из (61.39) имеем

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \to +0} \frac{i}{y - it},$$

причем из (61.44) следует, что предел, стоящий в правой части равенства, существует (в пространстве S'), он обычно обозначается $\frac{i}{y - i0}$ (см. упражнение 9).

Таким образом,

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{y - i0}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 26. Найти преобразование Фурье функций $x^k Q(x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Дополнение

§ 62

Некоторые вопросы приближенных вычислений

62.1. Применение формулы Тейлора для приближенного вычисления значений функций и интегралов

Для вычисления значений функций очень удобно пользоваться формулой или рядом Тейлора. Поясним это на примерах.

1. Вычисление значения синуса. Формула Тейлора для функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin^{(2n+1)} \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

(мы взяли остаточный член в форме Лагранжа). Поэтому

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{62.1}$$

Пусть требуется найти $\sin 20°$ с точностью до 10^{-3}. В радианной мере $20°$ соответствует $\pi/9$, поэтому выберем номер n так, чтобы

$$|r_n(\pi/9)| < \frac{1}{10^3}; \tag{62.2}$$

тогда значение многочлена Тейлора порядка n в точке $x = \pi/9$ и даст искомое приближение $\sin 20°$. В силу неравенства (62.1), для выполнения условия (62.2) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1} < \frac{1}{10^3}. \tag{62.3}$$

При $n = 1$ это неравенство не выполняется:

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 > \frac{1}{6}\,\frac{1}{3^3} = \frac{1}{162} > \frac{1}{10^3},$$

но уже при $n = 2$ оно выполняется

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840} < \frac{1}{10^3}.$$

Поэтому $\sin 20°$ с точностью до 10^{-3} находится по формуле

$$\sin 20° \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \text{*}. \qquad (62.4)$$

Беря значение π из таблиц с точностью до 10^{-4}, подставляя в формулу (62.4), произведя указанные там действия и округляя результат с точностью до 10^{-3}, получим искомое приближение $\sin 20°$. Имеем: $\sin 20° \approx 0{,}343$**.

При вычислении значений синуса можно воспользоваться не формулой, а рядом Тейлора, который для действительного аргумента является знакочередующимся и поэтому допускает простую оценку остатка: он не превышает по абсолютной величине абсолютной величины первого члена остатка (см. п. 30.9). Это дает, естественно, тот же результат, что и выше, так как приводит к оценке (62.3), которую мы получили из других соображений.

2. Вычисление значений натуральных логарифмов. Ряд Тейлора для логарифма

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1, \qquad (62.5)$$

может быть непосредственно использован лишь для вычисления логарифмов чисел, не превышающих двух. Однако из ряда (62.5) можно получить другие разложения, позволяющие вычислить логарифмы любых чисел. Заменяя в (62.5) x на $-x$ и вычитая получившийся ряд из (62.5), получим

$$\ln\frac{1 + x}{1 - x} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n + 1}, \quad |x| < 1. \qquad (62.6)$$

---

* Знак $\approx$ обозначает приближенное равенство с указанной степенью точности.

**Заметим, что в рассматриваемом случае легко устанавливается и более сильное неравенство $r_2\left(\frac{\pi}{9}\right) < \frac{1}{3}10^{-3}$, а при указанном выборе числа знаков π ошибка при вычислении правой части формулы (62.4) во всяком случае не будет превышать $\frac{2}{3} \cdot 10^{-3}$, поэтому суммарная ошибка и будет не больше 10^{-3}.

Когда x изменяется от -1 до 1, то $\frac{1+x}{1-x}$ принимает все положительные значения. Поэтому формула (62.6) может быть использована для вычисления логарифмов любых чисел. Естественно, возникает вопрос о том, сколько надо взять членов в ряде (62.6), чтобы получить логарифм числа с заданной точностью. Для этого надо оценить остаток ряда (62.6). Имеем

$$|r_n(x)| = 2|x| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} < \frac{2|x|^{2n+1}}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} =$$
$$= \frac{2|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}, \ |x| < 1. \qquad (62.7)$$

Применим эту оценку для вычисления $\ln 2$ с точностью 10^{-3}. Решая уравнение

$$\frac{1+x}{1-x} = 2,$$

находим $x = 1/3$. Полагая в (62.6) $x = 1/3$, находим

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n}}. \qquad (62.8)$$

Оценка (62.7) в этом случае дает

$$\left| r_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| < \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} \frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}.$$

Отсюда при $n = 3$ имеем

$$r_3\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 3^5} = \frac{1}{28 \cdot 243} < \frac{1}{10^3}.$$

Поэтому для вычисления $\ln 2$ с точностью до 10^{-3} достаточно взять первые три члена ряда (62.8):

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^4}\right) \approx 0{,}693.$$

При более грубых вычислениях значений функции с помощью формулы Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

часто бывает достаточно ограничиться лишь ее линейной частью, т. е. первыми двумя членами

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

иначе говоря, заменить приращение функции ее дифференциалом

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x,$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Формула Тейлора позволяет приближенно вычислять и значения определенных интегралов. Рассмотрим один пример такого рода.

3. Вычисление с точностью до 0,0001 интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

Напишем для подынтегральной функции формулу Тейлора. Для этого воспользуемся известной нам формулой Тейлора для функции $\sin x$ (см. (62.1)), тогда получим

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} + \frac{r_n(x)}{x};$$

поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\int\limits_0^1 x^{2k-2}dx + \int\limits_0^1 \frac{r_n(x)}{x}dx.$$

В силу оценки (62.1),

$$\left|\int\limits_0^1 \frac{r_n(x)}{x}dx\right| \leqslant \int\limits_0^1 \frac{|r_n(x)|}{x}dx \leqslant \frac{1}{(2n+1)!}\int\limits_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Поскольку при $n = 3$

$$\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} = \frac{1}{7!7} = \frac{1}{35\,280} < \frac{1}{3}\ 10^{-4},$$

с точностью до 0,0001 имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \int\limits_0^1 dx - \frac{1}{6}\int\limits_0^1 x^2dx + \frac{1}{120}\int\limits_0^1 x^4dx = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0{,}9961^{*}.$$

Отметим, что на практике для приближенного вычисления интегралов применять формулу Тейлора обычно оказывается нецелесообразным, поскольку в нее входят производные заданной функции и их вычисление приводит к дополнительному накоплению ошибок. Целесообразнее применять приближенные формулы интегрирования, в которые входят только значения самой функции. Подобные методы приближенного интегрирования будут рассмотрены в п. 60.4.

З а м е ч а н и е. Для проведения фактических вычислений значений функций или интегралов от них с помощью разложе-

* При переводе простых дробей в десятичные была сделана ошибка, не превышающая $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, поэтому суммарная ошибка при выполненном приближенном вычислении рассматриваемого интеграла действительно не превышает 10^{-4}.

ний функций в ряды годятся далеко не всякие разложения рассматриваемых функций в ряды. Может случиться, что полученный ряд будет сходиться столь «медленно», что практически он либо совсем будет не пригоден для вычислений, либо потребует неоправданно большого их объема (образно говоря, в этом случае ряд «практически расходится», хотя и «теоретически сходится»). В такой ситуации надо попытаться получить какой-то другой ряд, который будет сходиться достаточно быстро («улучшить сходимость ряда», как обычно говорят) и сумма которого позволит найти значения рассматриваемой функции. Именно так и было сделано выше при рассмотрении метода вычисления логарифмов. Было бы, например, нецелесообразно вычислять даже значение $\ln(3/2)$ с помощью ряда (62.5), хотя ряд и сходится при $x = 1/2$, а следует для этого воспользоваться рядом (62.6) при $x = 1/5$, так как этот ряд сходится быстрее.

62.2. Решение уравнений

Рассмотрим задачу решения уравнения

$$f(x) = 0. \qquad (62.9)$$

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разного знака, то метод, которым в п. 6.2 была доказана теорема о существовании в этом случае точки x_0, в которой функция обращается в нуль, дает и приближенный метод вычисления этого значения x_0, т. е. корня уравнения (62.9). Для этого достаточно последовательно делить отрезок $[a, b]$ пополам, выбирая каждый раз тот отрезок, на концах которого функция f принимает значения разного знака (если, конечно, не случится, что в одном из получившихся концов функция f обратится в нуль — в этом случае искомый корень будет уже найден). Если требуется найти корень уравнения (62.9) с точностью до заданного $\varepsilon > 0$, то после n шагов таких, что

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon,$$

концы получившегося отрезка и будут давать искомое приближение некоторого корня уравнения (62.9) (одно с недостатком, другое с избытом). Такой способ приближенного решения уравнения (62.9), носящий название «метода вилки», принципиально очень прост, хотя и достаточно трудоемок. Он большей частью применяется лишь для «грубой прикидки» результата, т. е. для «грубого» определения интервала, на ко-

тором лежит искомый корень рассматриваемого уравнения, а затем на этом интервале для отыскания «более точного» значения корня используются другие, быстрее сходящиеся методы; обычно применяется нижеописанный метод касательных («метод Ньютона»). Как правило, по такой схеме действуют при проведении вычислений на быстродействующих вычислительных машинах. Конечно, такой путь целесообразен и при проведении вычислений «вручную», в частности при помощи логарифмической линейки или миникомпьютера.

Рассмотрим методы решения уравнения: метод хорд и метод касательных. Последний из них хорошо обобщается и на случай систем уравнений.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке первую и вторую производные*, причем обе они знакопостоянны (в частности, отличны от нуля).

Мы будем предполагать также, что функция f принимает на концах отрезка значения разного знака. В силу знакопостоянства первой производной, функция строго монотонна, поэтому при сделанных предположениях уравнение (60.9) имеет в точности один корень на интервале (a, b).

1. Метод хорд. Этот метод состоит в следующем. График функции f заменяется его хордой, т. е. отрезком, соединяющим концевые точки графика функции f: точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Абсцисса x_1 точки пересечения этой хорды с осью Ox и рассматривается как первое приближение искомого корня (рис. 21). Далее берется тот из отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$, на концах которого функция f принимает значения разного знака (далее будет показано, что при сделанных предположениях $f(x)_1 \neq 0$ и, следовательно, такой отрезок всегда существует), и к нему применяется тот же прием; получается второе приближение корня x_2 и т. д. В результате образуется последовательность x_n, $n = 1, 2, \dots$, которая, как это будет показано, при сделанных ограничениях на функцию f сходится к корню уравнения (62.9).

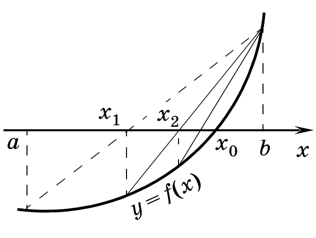


Рис. 21

* Для метода хорд достаточно требовать существования первой и второй производных лишь на интервале (a, b). Существование производной в концах отрезка $[a, b]$ будет использовано только в методе касательных.

Легко получить рекуррентные формулы для указанных чисел x_n, $n = 1, 2, \dots$. Уравнение прямой, проходящей через крайние точки графика функции f, имеет вид

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \tag{62.10}$$

Обозначим его правую часть через $l(x)$, т. е. запишем уравнение (62.10) в виде

$$y = l(x).$$

Найдем абсциссу x_1 точки пересечения прямой (62.10) с осью Ox, т. е. решим уравнение $l(x) = 0$; получим

$$x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{62.11}$$

Легко убедиться, что

$$a < x_1 < b \tag{62.12}$$

(это, например, следует из строгой монотонности и непрерывности функции $l(x)$ и того, что на концах отрезка $[a, b]$ она принимает значения разного знака: $l(a) = f(a)$ и $l(b) = f(b)$).

Аналогично находим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{62.13}$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к корню уравнения (62.9) монотонно. Предположим для определенности, что $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $a < x < b$ (рис. 21). В этом случае функция f строго монотонно возрастает и строго выпукла вниз. Следовательно, любая внутренняя точка хорды, соединяющей крайние точки графика функции f, лежит над соответствующей точкой графика функции f, т. е. $l(x) > f(x)$, $a < x < b$.

В частности, если x_0 — корень уравнения (62.9): $f(x_0) = 0$, то отсюда следует, что $l(x_0) > 0$. Имеем (см. (62.11) и (62.12)): $l(x_1) = 0$, $a < x_1 < b$.

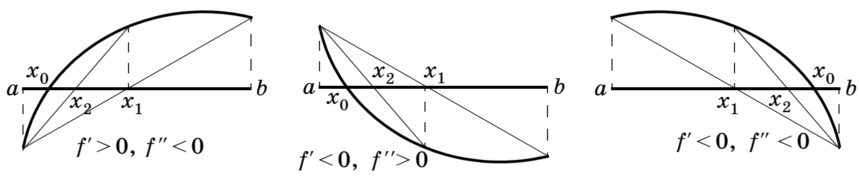


Рис. 22

Таким образом,

$$l(x_1) < l(x_0), \qquad (62.14)$$

но линейная функция $l(x)$ строго монотонно возрастает, так как

$$l(b) = f(b) > f(a) = l(a),$$

поэтому из (62.14) следует $x_1 < x_0$. Заменяя теперь отрезок $[a, b]$ отрезком $[x_1, b]$ и замечая, что $f(x_1) < 0$, аналогично докажем, что $x_1 < x_2 < x_0$. Далее по индукции получим $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x_0$.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$, будучи монотонной и ограниченной, сходится. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (62.13), получим $f(c) = 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения (62.9).

Если $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $a < x < b$, то нетрудно получить оценку скорости сходимости последовательности $\{x_n\}$ через значения самой функции f в точках x_n. Действительно,

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x_0) = f'(\xi_n)(x_n - x_0),$$

$$x_n < \xi_n < x_0, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

отсюда

$$|x_n - x_0| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Остальные случаи, т. е. случаи

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$$

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0,$$

$$f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0,$$

рассматриваются аналогично разобранному (см. рис. 22).

2. Метод касательных (метод Ньютона). Будем предполагать, что функция f удовлетворяет тем же условиям, что и при рассмотрении метода хорд. Проведем касательную к графику функции f в одной из его концевых точек, например в точке $(b, f(b))$. Абсцисса x_1 точки ее пересечения с осью Ox и считается первым приближением корня уравнения (62.9). Далее, если $x_1 \in (a, b)$ (а это всегда имеет место для одной из касательных в концевых точках графика, см. ниже), то из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ выбирается тот, на концах которого функция f принимает значения разного знака (далее будет показано, что $f(x_1) \neq 0$). Затем проводится касательная к графику

функции f в точке $(x_1, f(x_1)$: точка ее пересечения с осью Ox обозначается x_2 и т. д. (рис. 23).

Легко получаются рекуррентные формулы для указанных чисел x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Уравнение касательной, проходящей через точку $(b, f(b))$, имеет вид

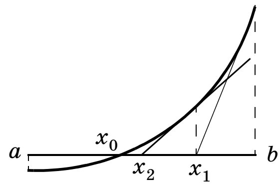


Рис. 23

$$y = f'(b)(x - b) + f(b).$$

Обозначим его правую часть через $L(x)$, т. е. запишем это уравнение в виде

$$y = L(x).$$

Найдем абсциссу x_1 точки пересечения этой касательной с осью Ox, т. е. решим уравнение $L(x) = 0$; получим

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Точка x_1 может лежать, вообще говоря, вне отрезка $[a, b]$, т. е. вне области определения функции f. Однако если $f(b)$ одного знака с f'', то $x_1 \in (x, b)$. Рассмотрим подробно, как и для метода хорд, случай, когда $f' > 0$, $f'' > 0$ на $[a, b]$. В этом случае функция f строго монотонно возрастает, следовательно, $f(b) > 0$; кроме того, функция f выпукла вниз на (a, b), следовательно, $L(x) < f(x)$, $x \neq b$ (см. п. 14.3).

Если $f(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$, то $L(x_0) < 0$, но $L(b) = f(b) > 0$, следовательно, $x_0 < x_1 < b$. При этом $f(x_1) > L(x_1) = 0$.

Применяя те же рассуждения к отрезку $[a, x_1]$, получим точку x_2 такую, что

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_0 < x_2 < x_1,$$

и, далее,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 < x_{n+1} < x_n. \qquad (62.15)$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена, а потому сходится. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$. Переходя к пределу в (62.15), получим $f(c) = 0$, т. е. последовательность (62.15) сходится к корню уравнения (62.9).

Когда $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $a < x < b$, то тем же способом, что и в случае метода хорд, получаем оценку

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Подобным же образом разбираются и оставшиеся случаи различных комбинаций знаков первой и второй производных (рис. 24).

Дадим еще одну оценку скорости сходимости метода касательных, из которой будет хорошо видно достоинство этого метода. Пусть для функции f на рассматриваемом интервале выполняются неравенства

$$|f'(x)| \geqslant m > 0, \quad |f''(x)| \leqslant M, \quad a < x < b.$$

Разложим функцию f в окрестности точки x_n по формуле Тейлора, например, с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_n)^2,$$

где $\xi = x_n + \theta(x - x_n)$, $0 < \theta < 1$. Если $f(c) = 0$, то, подставляя $x = c$ в последнюю формулу, получим

$$f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(c - x_n)^2 = 0.$$

Отсюда

$$x_n - c = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2,$$

или, в силу формулы (60.15),

$$x_{n+1} - c = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$

Следовательно,

$$|x_{n+1} - c| \leqslant \frac{M}{2m}|x_n - c|^2,$$

откуда

$$\frac{M}{2m}|x_{n+1} - c| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|x_n - c|\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Применяя последовательно это неравенство, будем иметь

$$\frac{M}{2m}|x_n - c| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|x_{n-1} - c|\right)^2 \leqslant \left[\left(\frac{M}{2m}|x_{n-2} - c|\right)^2\right]^2 \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \left(\frac{M}{2m}|b - c|\right)^{2^n}.$$

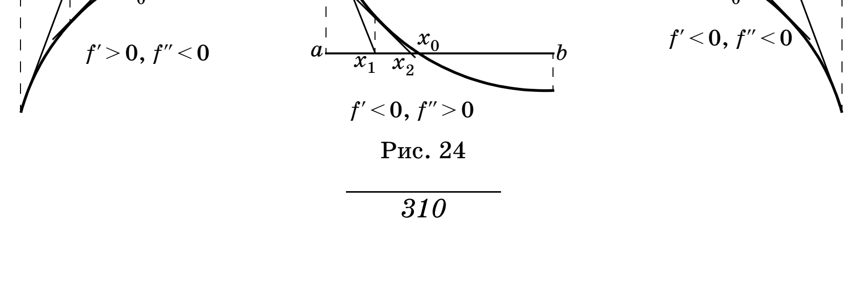


Рис. 24

Если выбрать первоначальное приближение b так, чтобы $q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{2m} |b - c| < 1$, то получим

$$|x_n - c| < \frac{2m}{M} q^{2^n},$$

т. е. скорость сходимости приближенных решений x_n к корню $x = c$ значительно превышает скорость убывания геометрической прогрессии со знаменателем по абсолютной величине, меньшим единицы.

Пример. Применим метод Ньютона для приближенного вычисления корня k-й степени из числа $a > 0$, k — целое положительное. В этом случае речь идет о приближенном решении уравнения $x^k - a = 0$, т. е. формулу (62.15) следует применить к функции $f(x) = x^k - a$.

Имеем $f'(x) = kx^{k-1}$, и потому для последовательных приближенных значений x_n корня $\sqrt[k]{x}$ имеем рекуррентную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}},$$

или

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right].$$

В случае $k = 2$ мы встречались с этой формулой в п. 4.9.

62.3. Интерполяция функций

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и пусть фиксированы $n + 1$ значений аргумента x_i, $i = 1, 2, \dots, n + 1$:

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leqslant b. \qquad (62.16)$$

Одна из простейших интерполяционных задач состоит в отыскании многочлена $P(x)$ не выше некоторой данной степени m, который при значениях аргумента $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, называемых *узлами интерполяции*, принимает те же значения, что и данная функция, т. е. имеют место равенства

$$f(x_i) = P(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1. \qquad (62.17)$$

Такой многочлен $P(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, интерполирующим функцию в данных узлах интерполяции.

Для того чтобы исследовать вопрос о существовании интерполяционного многочлена $P(x)$, удовлетворяющего условиям (62.17), запишем его с неопределенными коэффициентами a_j, $j = 0, 1, \dots, m$,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

и подставим его в систему (62.17). Получим систему из $(n + 1)$-го линейного уравнения с $m + 1$ неизвестными $a_0, a_1, \dots, a_m$:

$$a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_1^m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (62.18)$$
$$a_0 + a_1 x_{n+1} + \dots + a_m x_{n+1}^m = f(x_{n+1}).$$

Определитель, составленный из коэффициентов этой системы, стоящих в первых k строчках и первых k столбцах, $k \leqslant \min\{m + 1, n + 1\}$ (число строчек равно $n + 1$, число столбцов $m + 1$), является определителем Вандермонда[*], известным из курса алгебры:

$$W(x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} 1\ x_1, \dots, x_1^{k-1} \\ 1\ x_2, \dots, x_2^{k-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 1\ x_k, \dots, x_2^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (x_j - x_i).$$

Здесь этот определитель не равен нулю, так как все узлы интерполяции различны. Поэтому ранг матрицы коэффициентов системы (62.18) равен наименьшему из двух чисел $m + 1$ и $n + 1$. Если $n > m$, то система (62.18), вообще говоря, не имеет решения. Если $n \leqslant m$, то решение системы (62.18) всегда существует, причем в случае $n = m$ решение единственно, а при $n < m$ решений бесконечно много. Таким образом, *какие бы ни задать значения в* $(n + 1)$*-м узлах* (62.16), *всегда существует и притом единственный многочлен степени не выше чем* n, *принимающий в этих узлах заданные значения.*

Для отыскания интерполяционного многочлена $P(x)$ можно решить систему (62.18). Однако можно найти его и другим, более коротким путем. Рассмотрим многочлен

$$P_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})},$$
$$i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Очевидно, что $P_i(x)$ — многочлен степени n и что

$$P_i(x_i) = 1, \quad P_i(x_j) = 0,$$
$$i = 1, 2, \dots, n + 1, j = 1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n + 1. \quad (62.19)$$

[*] Вандермонд А. Т. (1735—1796) — французский математик.

Поэтому искомый интерполяционный многочлен может быть записан в виде

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\, P_i(x). \qquad (62.20)$$

Действительно, написанное выражение является многочленом степени не выше n и, в силу (62.19), удовлетворяет условиям (62.17). Интерполяционный многочлен, записанный в виде (62.20), называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*. Исследуем теперь разность между функцией и интерполяционным многочленом $R(x) = f(x) - P(x)$, называемую *остаточным членом интерполяции*. Предположим, что функция f $n + 1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда этим же свойством обладает и остаток $R(x)$, причем

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (62.21)$$

так как $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$. Положим

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1}),$$

зафиксируем $x \in [a, b]$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = R(t) - \frac{R(x)}{\omega(x)}\,\omega(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Функция $\varphi(t)$, очевидно, также $n + 1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем из (62.21) и того, что $\omega^{(n+1)}(t) = (n + 1)!$, имеем

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\frac{R(x)}{\omega(x)}. \qquad (62.22)$$

Далее, функция $\varphi(t)$ обращается в нуль в $n + 2$ точках x, x_1, x_2, ... , x_{n+1}, поэтому, в силу теоремы Ролля, ее производная обращается в нуль по крайней мере в $n + 1$ точке отрезка $[a, b]$, вторая производная — в n точках и т. д. По индукции получим, что $(n + 1)$-я производная функции φ обращается по крайней мере один раз в нуль внутри отрезка $[a, b]$. Пусть $\varphi^{(n+1)}(\zeta) = 0$, $a < \zeta < b$, тогда из (62.22) при $t = \zeta$ получим

$$R(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\zeta),$$

или, подробнее,

$$R(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\zeta), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad a < \zeta < b.$$

Отсюда следует оценка остаточного члена

$$|R(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})| \left| \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Заметим, что, вообще говоря, даже для аналитических на отрезке $[a, b]$ функций остаточный член интерполяции не стремится к нулю на отрезке $[a, b]$ при $n \to \infty$, т. е. интерполяционные полиномы не сходятся к самой функции. Построение соответствующих примеров достаточно громоздко, поэтому мы не будем на этом останавливаться.

62.4. Квадратурные формулы

Рассмотрим теперь некоторые способы приближенного интегрирования функций. Формулы для приближенных значений интегралов называются *квадратурными формулами*.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками x_k, $k = 1, 2, \dots, n - 1$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b; \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n},$$
$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Квадратурные формулы, которые мы рассмотрим, будут получаться посредством замены при интегрировании функции f на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ интерполяционным многочленом степени n. Мы изучим случаи $n = 0, 1, 2$. Соответствующие приближенные значения интеграла от функции f будем обозначать символом $L_n(f)$, $n = 0, 1, 2$. В первом случае (при $n = 0$) соответствующая квадратурная формула называется *формулой прямоугольников*, во втором (при $n = 1$) — *формулой трапеций*, в третьем ($n = 2$) — *параболической формулой* или, чаще, *формулой Симпсона**.

1. Формула прямоугольников. Для интерполяции функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, многочленом нулевой степени достаточно задать лишь один узел. Возьмем в качестве узла середину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Интерполяционным многочленом является постоянная $P_k(x) = f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

При такой интерполяции мы заменяем данную функцию f «ступенчатой функцией», точнее набором функций, постоян-

* Т. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

ных на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ и равных значению функции f в центре отрезка (рис. 25). Вместо интеграла $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ возьмем интеграл $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx$, т. е. заменим площадь криволинейной трапеции площадью соответствующего прямоугольника.

Напишем теперь квадратурную формулу прямоугольников

$$L_0[f] = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k), \quad (62.23)$$

итак,

$$L_0[f] = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right].$$

2. Формула трапеций. На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, возьмем интерполяционный многочлен $P_k(x)$ первой степени, определяемый узлами интерполяции x_{k-1} и x_k. Полагая $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, получим (см. (62.20))

$$P_k(x) = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k}\, y_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\, y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, мы заменяем данную функцию f кусочно-линейной функцией. Вместо интеграла $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ возьмем интеграл $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx$, т. е. заменим площадь криволинейной трапеции соответствующей площадью обыкновенной трапеции (рис. 26).

Замечая, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \frac{y_{k-1} + y_k}{2}\,\frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

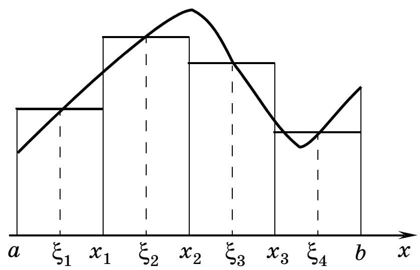


Рис. 25

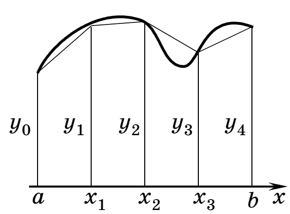


Рис. 26

получим квадратурную формулу трапеций

$$L_1[f] = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2}, \qquad (62.24)$$

или

$$L_1[f] = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \right].$$

3. Формула Симпсона. На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, возьмем интерполяционный многочлен $P_k(x)$ второй степени, определяемый узлами интерполяции x_{k-1}, $\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ и x_k. Тогда

$$P_k(x) = \frac{(x - \xi_k)(x - x_k)}{(x_{k-1} - \xi_k)(x_{k-1} - x_k)} f(x_{k-1}) +$$

$$+ \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(\xi_k - x_{k-1})(\xi_k - x_k)} f(\xi_k) + \frac{(x - x_{k-1})(x - \xi_k)}{(x_k - x_{k-1})(x_k - \xi_k)} f(x_k).$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x - \xi_k)(x - x_k)}{(x_{k-1} - \xi_k)(x_{k-1} - x_k)} dx = \frac{1}{6} (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{6} \frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(\xi_k - x_{k-1})(\xi_k - x_k)} dx = \frac{2}{3} (x_k - x_{k-1}) = \frac{2}{3} \frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x - x_{k-1})(x - \xi_k)}{(x_k - x_{k-1})(x_k - \xi_k)} dx = \frac{1}{6} (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{6} \frac{b-a}{n},$$

поэтому

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{6} f(x_{k-1}) + \frac{2}{3} f(\xi_k) + \frac{1}{6} f(x_k) \right].$$

Теперь нетрудно написать квадратурную формулу Симпсона:

$$L_2[f] = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{6} f(x_{k-1}) + \frac{2}{3} f(\xi_k) + \frac{1}{6} f(x_k) \right], \qquad (62.25)$$

или

$$L_2[f] = \frac{b-a}{6n} \{f(a) + f(b) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] +$$

$$+ 4[f(\xi_k)] + \dots + f(\xi_n)]\}.$$

62.5. Погрешность квадратурных формул*

Во всех трех рассмотренных нами случаях квадратурные формулы (см. (62.23), (62.24), (62.25)) имеют вид

$$L(f) = \sum_{k=1}^{n} l_k(f), \tag{62.26}$$

где

$$l_k(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{m} p_i f(\xi_{ki}), \tag{62.27}$$

$$x_{k-1} \leqslant \xi_{ki} \leqslant x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

а p_i — некоторые числа.

В случае формулы прямоугольников

$$m = 0, \quad p_0 = 1, \quad \xi_{k0} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2};$$

в случае формулы трапеций

$$m = 1, \quad p_0 = p_1 = \frac{1}{2}, \quad \xi_{k0} = x_{k-1}, \quad \xi_{k1} = x_k;$$

в случае формулы Симпсона

$$m = 2, \quad p_0 = p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{2}{3},$$

$$\xi_{k0} = x_{k-1}, \xi_{k1} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad \xi_{k2} = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть теперь заданы какие-либо числа p_i, называемые *весами*, и пусть на отрезке $[0, 1]$ задана какая-либо система точек ξ_i, $i = 0, 1, \dots, m$, называемых *узлами*. Пусть, как и раньше, отрезок $[a, b]$ разделен точками x_k, $k = 0, 1, \dots, n$, на n равных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, и пусть точки ξ_{ki} получаются из узлов ξ_i при линейном отображении отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, при котором точка нуль переходит в точку x_{k-1}, т. е. при отображении $x = (x_k - x_{k-1})t + x_{k-1}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Формула (62.26) в этом случае называется квадратурной формулой, соответствующей узлам ξ_i и весам p_i, $i = 0, 1, \dots, m$.

Всякая квадратурная формула (62.26) обладает свойством линейности: для любых двух функций f и g, определенных на отрезке $[a, b]$, и для любых двух чисел λ и μ, очевидно, справедливо равенство

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g).$$

---

* В этом пункте мы следуем идеям, развитым в монографии: *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. — М., 1974.

Определение. *Квадратурная формула* $L(f) = \sum_{k=1}^{n} l_k(f)$ *называется точной для многочленов степени* r, *если для любого многочлена* $P(x)$ *степени не выше чем* r, *для любого отрезка* $[a, b]$ *и для любого числа* n (*т. е. для любого разбиения отрезка* $[a, b]$ *на равные отрезки*) *справедливо равенство*

$$L(P(x)) = \int_a^b P(x)dx.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что для того чтобы квадратурная формула $L[f]$, соответствующая узлам ξ_i и весам p_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, была точной для многочлена степени r, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $P(x)$ степени не выше r было справедливо равенство

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{m} p_i P(\xi_i).$$

Поскольку интерполяционный многочлен порядка r совпадает для многочлена степени r с самим многочленом, квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона точны соответственно для многочленов нулевой, первой и второй степени.

Однако, более того, квадратурная формула прямоугольников точна для многочленов первой степени, а формула Симпсона — для многочленов третьей степени. Докажем это. Действительно, в случае формулы прямоугольников (см. (62.23) и (62.27))

$$l_k(f) = f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)(x_k - x_{k-1}).$$

Простой подсчет дает, что для любой линейной функции $y = Ax + B$ справедливо равенство

$$l_k(Ax + B) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (Ax + B)dx. \tag{62.28}$$

Это наглядно видно и на рис. 27. Суммируя равенства (62.28) по k от 1 до n, получим

$$L_0(Ax + B) = \int_a^b (Ax + B)dx,$$

что и означает точность квадратурной формулы прямоугольников для многочленов первой степени.

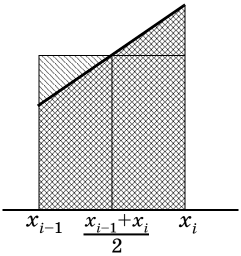


Рис. 27

В случае формулы Симпсона (см. (62.25) и (62.27))

$$l_k(f) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6} f(x_{k-1}) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x_k)\right]. \tag{62.29}$$

Достаточно показать, что в этом случае для любого многочлена третьей степени $P(x)$

$$l_k(P(x)) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{62.30}$$

В самом деле, если эти равенства будут доказаны, то, суммируя их по k от 1 до n, получим

$$L_2(P(x)) = \int\limits_a^b P(x)dx,$$

т. е. что формула Симпсона точна для многочленов третьей степени.

Пусть $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Положим $Q(x) = Bx^2 + Cx + D$, тогда $P(x) = Ax^3 + Q(x)$. Поэтому

$$l_k(P(x)) = Al_k(x^3) + l_k(Q(x)),$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)dx = A\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} x^3dx + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)dx, k = 1, 2, \dots, n. \tag{62.31}$$

В силу того что формула Симпсона точна для многочленов второй степени, имеем

$$l_k(Q(x)) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} x^3dx = \frac{x_k^4 - x_{k-1}^4}{4},$$

$$l_k(x^3) = (x_k - x_{k-1})\left[\frac{x_{k-1}^3}{6} + \frac{2}{3}\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^3 + \frac{x_k^3}{6}\right] = \frac{x_k^4 - x_{k-1}^4}{4}.$$

Это и доказывает равенство (62.30).

Порядок погрешности квадратурных формул оказывается связан со степенью многочленов, относительно которых точна рассматриваемая квадратурная формула.

ТЕОРЕМА. *Пусть функция f r раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и пусть число $M > 0$ таково, что*

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant M, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Если квадратурная формула (62.26) *точна для многочленов степени $r - 1$ ($r = 1, 2, \dots$), то существует постоянная $c_r > 0$, не зависящая от функции f, такая, что*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx - L(f)\right| \leqslant \frac{c_r M(b-a)^{r+1}}{n^r}. \tag{62.32}$$

Доказательство. Представим функцию f на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, согласно формуле Тейлора, в виде

$$f(x) = P_k(x) + r_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_{k-1})}{j!} (x - x_{k-1})^j$$

— многочлен Тейлора степени $r - 1$, и, следовательно, $r_k(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, который мы запишем в форме Лагранжа:

$$r_k(x) = \frac{f^{(r)}[x_{k-1} + \theta_k(x - x_{k-1})]}{r!} (x - x_{k-1})^r, \tag{62.33}$$

$$0 < \theta_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

тогда

$$\int_a^b f(x)dx - L(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} l_k(f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx - l_k(P_k(x))\right] + \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} r_k(x)dx - l_k(r_k(x))\right]. \tag{62.34}$$

В силу того что данная квадратурная формула точна для многочленов степени $r - 1$, справедливо равенство

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx - l_k(P_k(x)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n^*.$$

Поэтому из (62.34) следует, что

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L(f)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |r_k(x)|dx + \sum_{k=1}^{n} |l_k(r_k(x))|. \tag{62.35}$$

Далее, из (62.33) имеем

$$|r_k(x)| \leqslant \frac{M}{r!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^r, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Применяя это неравенство, получим

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |r_k(x)|dx \leqslant \frac{M(b-a)^r}{r!n^r} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx = \frac{M(b-a)^{r+1}}{r!n^{r+1}}.$$

---

* Действительно, это следует из определения точности квадратурной формулы относительно многочленов данной степени, приведенного на с. 318, если в этом определении в качестве отрезка $[a, b]$ взять отрезок $[x_{b-1}, x_k]$ и положить $n = 1$.

Полагая $p = \max\limits_{i=0,1,\ldots,m} |p_j|$ (см. (62.27)), имеем

$$|l_k(r_k(x))| \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{m} |p_i|\,|r_k(\xi_{ki})| \leqslant \frac{(m+1)(b-a)^{r+1}pM}{r!n^{r+1}}.$$

Подставляя эти оценки в (60.35) и введя обозначение

$$c_r = \frac{1+(m+1)p}{r!},$$

мы и получим неравенство (62.32). □

Из формулы (62.32) следует, в частности, что при вычислении интегралов с помощью квадратурных формул прямоугольников и трапеций (они, как мы знаем, точны для многочленов первого порядка, и потому для них можно взять $r = 2$) ошибка имеет порядок $O(1/n^2)$, а при вычислении интегралов с помощью формулы Симпсона (она точна уже для многочленов третьего порядка и можно взять $r = 4$) ошибка составляет уже всего лишь величину $O(1/n^4)$, $n \to \infty$.

Отметим, что при приведенном подсчете постоянных c_r мы не получили для них минимальных значений. Этого можно достичь, усовершенствовав методы их подсчета.

Задача 10. Доказать, что для формулы прямоугольников можно взять $c_2 = 1/24$, для формулы трапеций $c_2 = 1/12$, а для формулы Симпсона $c_4 = 1/2880$.

62.6. Приближенное вычисление производных

Приближенное вычисление производных производится на основе формул, которыми они определяются. Например, поскольку

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

так называемое разностное отношение

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (62.36)$$

дает приближенное значение производной. При этом эта формула позволяет вычислить производную с любой степенью точности за счет выбора соответствующего h — это следует из определения предела.

Оценим порядок приближения производной, вычисляемой по формуле (62.36), относительно h. Предположим, что функ-

ция f имеет в окрестности точки x ограниченную вторую производную. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + \frac{h^2}{2}\,f''(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1;$$

отсюда

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}\,f''(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

т. е.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h), \quad h \to 0. \square$$

Очевидно, что если в точке x существует производная, то

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

Оказывается, что приближенное вычисление производной в точке по приближенной формуле

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{62.37}$$

обеспечивает более высокий порядок малости погрешности относительно h. Покажем это. Пусть функция f имеет в окрестности точки x третью ограниченную производную. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}\,f''(x)h^2 + \frac{1}{6}\,f'''(x+\theta_1 h)h^3,\ 0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(x-h) = f(x) + f'(x)\,h + \frac{1}{2}\,f''(x)h^2 - \frac{1}{6}\,f'''(x+\theta_2 h)h^3,\ 0 < \theta_2 < 1.$$

Вычитая второе равенство из первого и деля на $2h$, получим

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{1}{6}[f'''(x+\theta_1 h) + f'''(x+\theta_2 h)]h^2 =$$

$$= f'(x) + O(h^2), \quad h \to 0.$$

Таким образом, разностное отношение (62.37) аппроксимирует производную на порядок лучше, чем (62.36).

Для приближенного вычисления второй производной в точке x можно поступить следующим образом: приближенно вычислить первую производную в точках x и $x + h$, например, по формулам (62.36):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},\ f'(x+h) \approx \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h};$$

тогда

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

Разностное отношение, стоящее в правой части полученной формулы, и принимается за приближенное значение второй производной в точке x.

В том случае, когда у функции f в окрестности точки x существует третья ограниченная производная, раскладывая числитель по формуле Тейлора, получим

$$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x)+O(h),\quad h\to 0. \quad (62.38)$$

Аналогично случаю первой производной можно показать (в предположении ограниченности четвертой производной в окрестности точки x), что

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)+O(h^2),\quad h\to 0, \quad (62.39)$$

т. е. у приближенной формулы (62.39) для вычисления второй производной погрешность на порядок лучше, чем у формулы (62.38).

Подобным же образом вычисляются производные более высоких порядков и частные производные функций многих переменных.

§ 63

Разбиение множества на классы эквивалентных элементов

Много раз в этом курсе мы сталкивались с понятием эквивалентности: эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие функции (п. 8.3), эквивалентные отображения отрезка (п. 16.2) и области (п. 50.3), эквивалентные фундаментальные последовательности метрических пространств (п. 57.5), эквивалентные элементы при факторизации множеств (п. 59.4) и т. д. Во всех этих случаях отношение эквивалентности обладало следующими тремя свойствами: если элементы рассматриваемого множества обозначить буквами x, y, z, ... , а эквивалентные элементы x и y обозначить символом $x \sim y$, то:

1^0. *Каждый элемент рассматриваемого множества эквивалентен самому себе*: $x \sim x$ (рефлексивность).

2^0. *Если* $x \sim y$, *то* $y \sim x$ (симметричность).

3^0. *Если* $x \sim y$ *и* $y \sim z$, *то* $x \sim z$ (транзитивность).

Всегда предполагалось само собой разумеющимся, что множество тех или иных элементов, в котором введено понятие эквивалентности, обладающее свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности, распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов. В действительности так и есть. Сформулируем и докажем это утверждение в общем случае.

Пусть задано множество $A = \{x, y, z, \ldots\}$ и некоторое подмножество множества его упорядоченных пар, обладающее следующими свойствами: если пара (x, y) принадлежит этому подмножеству, то элементы x и y называются эквивалентными и пишется $x \sim y$, при этом выполняются условия рефлексивности, симметричности и транзитивности. В этом случае говорится, что в множестве A задано отношение эквивалентности.

ТЕОРЕМА. *Если в некотором множестве задано отношение эквивалентности, то это множество является суммой своих попарно не пересекающихся подмножеств эквивалентных между собой элементов.*

Доказательство. Пусть $A = \{x, y, x, \ldots\}$ — множество, в котором задано отношение эквивалентности. Для каждого элемента $x \in A_x$ через A_x обозначим множество всех элементов множества A, эквивалентных элементу x. Покажем, что

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x \tag{63.1}$$

и что это представление множества A в виде суммы подмножеств A_x является искомым, т. е. что слагаемые A_x попарно не пересекаются.

Прежде всего, в силу рефлексивности отношения эквивалентности, для каждого $x \in A$ имеем $x \sim x$ и, следовательно, $x \in A_x$, т. е. каждый элемент множества A_x принадлежит некоторому A_x, поэтому

$$A \subset \bigcup_{x \in A} A_x. \tag{63.2}$$

С другой стороны, каждый элемент множества A_x, в силу самой конструкции, является элементом множества A. Следовательно, $A_x \subset A$ и потому

$$\bigcup_{x \in A} A_x \subset A. \tag{63.3}$$

Из включений (63.2) и (63.3) вытекает равенство (63.1).

Докажем теперь, что любые два элемента каждого из множеств A_x эквивалентны между собой. В самом деле, пусть $y \in A_x$, $z \in A_x$; это означает, что $y \sim x$ и $z \sim x$. В силу симметричности отношения эквивалентности, отсюда следует, что $x \sim z$, откуда, согласно транзитивности, $y \sim z$.

Покажем, наконец, что слагаемые в правой части равенства (63.1) попарно не пересекаются. Именно, покажем, что для любых двух элементов x' и x'' множества $A_{x'}$ и $A_{x''}$ либо совпадают, либо не пересекаются. В самом деле, пусть у множества $A_{x'}$ и $A_{x''}$ найдется хотя бы один общий элемент: $y \in A_{x'} \cap A_{x''}$ и пусть $z \in A_{x'}$. Поскольку было доказано, что для каждого множества A_x любые два его элемента эквивалентны, то $z \sim y$, $y \sim x''$ и, следовательно, $z \sim x''$, т. е. $z \in A_{x''}$. Элемент z являлся произвольным элементом из множества $A_{x''}$, поэтому

$$A_{x'} \subset A_{x''}; \tag{63.4}$$

аналогично

$$A_{x''} \subset A_{x'}. \tag{63.5}$$

Из (63.4) и (63.5) следует, что $A_{x'} = A_{x''}$.

Таким образом, если у множеств $A_{x'}$ и $A_{x''}$ имеется хотя бы один общий элемент, то они совпадают; если же такового элемента нет, то эти множества, очевидно, не пересекаются.

Итак, представление (63.2) действительно обладает всеми сформулированными в теореме свойствами. □

§ 64
Предел по фильтру

В курсе анализа нам встретились два понятия предела: предел функций, частным случаем которого является предел последовательностей, и предел интегральных сумм. Оказывается, что существует более общее понятие предела, называемое пределом по фильтру, которое содержит в себе оба указанные понятия предела как частные случаи. Существование такого понятия доставляет, безусловно, эстетическое удовлетворение, поэтому в настоящем параграфе будет дано его определение. Однако для изучения математического анализа введение этого понятия не дает, по существу, никаких преимуществ, чем и объясняется, что оно помещено в конце курса.

64.1. Топологические пространства

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество и в нем задана система $\Omega = \{G\}$ подмножеств, удовлетворяющих следующим условиям:*

1^0. *Пересечение конечной совокупности множеств системы Ω принадлежит этой системе.*

2^0. *Объединение любой совокупности множеств системы Ω принадлежит этой системе.*

3^0. $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$.

Тогда множество X называется топологическим пространством, система Ω — его топологией, а множества системы Ω — его открытыми подмножествами.

Для любой точки $x \in X$ каждое содержащее ее множество $G \in \Omega$ называется ее окрестностью.

Если у любых двух точек топологического пространства существуют непересекающиеся окрестности, то пространство называется хаусдорфовым.*

Примером хаусдорфова топологического пространства является всякое метрическое пространство, так как его открытые множества образуют систему, удовлетворяющую условиям 1^0, 2^0, 3^0 определения 1 (см. п. 57.1). Существуют и так называемые неметризуемые топологические пространства (см. об этом в кн.: *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М., 1977).

Нетрудно убедиться, что если X — топологическое пространство, $\Omega = \{G\}$ — его топология, $Z \subset X$ и $\Omega_Z = \{D \subset Z\colon \exists\, G \in \Omega,\ D = Z \cap G\}$ (т. е. Ω_Z состоит из пересечений всевозможных открытых множеств топологического пространства X с его подмножеством Z), то Z является топологическим пространством с топологией $\Omega_Z = \{D\}$.

Для любой точки $x \in X$ всякая ее окрестность заведомо не является пустым множеством, так как она содержит по крайней мере один элемент — саму точку x.

Определение 2. *Всякая подсистема $\mathfrak{B}$ системы Ω открытых множеств топологического пространства называется базой топологии этого пространства, если любое непустое открытое множество пространства (т. е. непустое множество из системы Ω) является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathfrak{B}$.*

---

* Ф. Хаусдорф (1868—1942) — немецкий математик.

Так, в метрическом пространстве базой топологии является множество $\mathfrak{B}$ всех ε-окрестностей всех точек этого пространства. Действительно, каково бы ни было непустое открытое множество G данного метрического пространства, для каждой его точки $x \in G$ существует такое $\varepsilon > 0$, что ее ε-окрестность содержится в G: $U(x; \varepsilon) \subset G$. Выберем и зафиксируем для каждой точки $x \in G$ одну из таких окрестностей; тогда множество G очевидно будет являться их объединением:

$$G = \bigcup_{x \in G} U(x; \varepsilon).$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что в любом метрическом пространстве множество всех ε-окрестностей с рациональным ε всех точек этого пространства образует его базу топологии.

Топологию можно задавать с помощью базы топологии. Именно: если $\mathfrak{B} = \{A\}$ — база топологии Ω пространства X, то, согласно определению 2, Ω является системой всех подмножеств пространства X, каждое из которых либо является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathfrak{B}$, либо пусто.

Определение 3. *Система $\mathfrak{B}(x)$ окрестностей точки x топологического пространства X называется локальной базой топологии в этой точке, если, какова бы ни была окрестность V точки x в пространстве X, существует такая окрестность $U \in \mathfrak{B}(x)$, что*

$$U \subset V.$$

Очевидно, что совокупность всех окрестностей данной точки образует ее локальную базу топологии. Для любой точки метрического пространства ее локальную базу топологии образуют также, например, все ее ε-окрестности радиусов $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Объединение локальных баз топологии во всех точках образует базу топологии всего пространства, так как каждое непустое открытое множество можно представить как объединение входящих в него окрестностей его точек, где указанные окрестности берутся из рассматриваемых локальных баз топологии. Тем самым топологию во множестве можно задавать, определяя локальные базы топологии в каждой из его точек.

С помощью понятия окрестности для топологических пространств дословно, так же как для метрических (см. пп. 57.1 и 35.2), вводятся понятия точек прикосновения, предельных и изолированных, а также понятие замкнутого множества.

64.2. Фильтры

В дальнейшем через $\mathfrak{P}(X)$ будем обозначать множество всех подмножеств множества X.

Определение 4. *Пусть X — непустое множество. Множество $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ называется фильтром (или, подробнее, фильтром на множестве X), если:*

1^0. *Для любых $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что*

$$A \subset A' \cap A''.$$

2^0. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \neq \varnothing$.

Из свойств 1^0 и 2^0 вытекает, что пересечение любого конечного числа множеств, принадлежащих фильтру, непусто.

Примеры. 1. Пусть $X \neq \varnothing$, $X \supset A_0 \neq \varnothing$. Тогда множество $\mathfrak{F} = \{A: A_0 \subset A \in \mathfrak{P}(X)\}$ является фильтром на X. Действительно, очевидно, что $A_0 \in \mathfrak{F}$, а если $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$, то $A' \cap A'' \supset A_0 \neq \varnothing$, т. е. оба условия 1^0 и 2^0 определения 4 выполнены.

2. Пусть $x \in X$. Тогда множество $\mathfrak{F} = \{A: x \in A \in \mathfrak{P}(X)\}$ есть фильтр на X. Этот фильтр является частным случаем фильтра, рассмотренного в предыдущем примере, когда множество A_0 состоит из одной точки x.

3. Пусть $X = \boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел и

$$A_n = \{m: m \in N, m > n\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \qquad (64.1)$$

Тогда множество всех A_n образует фильтр, обозначаемый $F_N = \{A_n\}$ и называемый *натуральным фильтром*.

Проверим, что F_N — фильтр. Действительно, $\boldsymbol{N} = A_0 \in F_N$, и, следовательно, $F_N \neq \varnothing$, все $A_n \neq 0$, а если $m < n$, то $A_n \cap A_m = A_n \in F_N$.

4. Пусть снова $X = \boldsymbol{N}$. Система подмножеств $\mathfrak{F}_N$ множества $\boldsymbol{N}$, каждое из которых является дополнением к конечному подмножеству множества $\boldsymbol{N}$, также образует фильтр на $\boldsymbol{N}$, называемый *фильтром Фреше* и содержащий в себе натуральный фильтр F_N.

Покажем, что $\mathfrak{F}_N$ действительно фильтр. Пусть $A \in \mathfrak{F}_N$, $B \in \mathfrak{F}_N$, $(N \setminus A) \cup (N \setminus B) \neq \varnothing$ и $n \in \boldsymbol{N}$ — наибольшее из чисел, входящих в множество $(\boldsymbol{N} \setminus A) \cup (\boldsymbol{N} \setminus B)$. Такое число существует,

так как указанное множество, в силу определения $\mathfrak{F}_N$, состоит лишь из конечного множества чисел. Тогда множество $A_n \in F_N$ (см. (64.1)) содержится в $A \cap B$. Далее, поскольку множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ счетно, а $\boldsymbol{N} \setminus A$, где $A \in \mathfrak{F}_N$, по определению множества $\mathfrak{F}_N$, конечно, то $A \neq \varnothing$. Наконец, $\boldsymbol{N} \in \mathfrak{F}_N$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_N \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathfrak{F}_N$ — фильтр.

5. Пусть X — топологическое пространство и $x \in X$. Локальная база топологии $\mathfrak{B}(x)$ образует фильтр. Действительно, прежде всего, очевидно, что для каждой окрестности $U \in \mathfrak{B}(x)$ имеем $x \in U$ и поэтому $U \neq \varnothing$. Далее, для любых $U \in \mathfrak{B}(x)$ и $V \in \mathfrak{B}(x)$ пересечение $U \cap V$ является открытым множеством, содержащим точку x, поэтому по определению локальной базы топологии существует такая окрестность $W \in \mathfrak{B}(x)$, что $W \subset U \cap V$.

6. Пусть X — топологическое пространство, x — предельная точка пространства X, $\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии в этой точке и $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ — множество всех «проколотых окрестностей» этой локальной базы топологии, т. е. $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ состоит из множеств

$$\mathring{U}(x) \overset{\text{def}}{=} U(x) \setminus \{x\},\ \ U(x) \in \mathfrak{B}(x).$$

Тогда $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ образует фильтр. В самом деле, если $\mathring{U} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$, то, поскольку точка x является предельной для пространства X, существует точка $y \in \mathring{U}$ и, следовательно, $\mathring{U} \neq \varnothing$. Далее, для любых $\mathring{U} \in \mathfrak{B}(x)$ и $\mathring{V} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$ имеем, согласно их определению, $\mathring{U} = U \setminus \{x\}$, $\mathring{V} = V \setminus \{x\}$, $U \in \mathfrak{B}(x)$, $V \in \mathfrak{B}(x)$. Пересечение $U \cap V$ является окрестностью точки x, поэтому существует такая окрестность $W \in \mathfrak{B}(x)$, что $W \subset U \cap V$, и поэтому $\mathring{W} = W \setminus \{x\} \subset \mathring{U} \cap \mathring{V}$. Итак, $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ действительно фильтр.

7. Множество X называется *упорядоченным множеством* или *направлением*, если для любых двух его элементов x и y определено транзитивное отношение порядка. Иначе говоря, из любых двух его элементов x и y один из них «следует» за другим. Если элемент y следует за элементом x, то пишут $x \dashv y$. При этом если $x \dashv y$ и $y \dashv z$, то $x \dashv z$, $x, y, z \in X$.

Всякая непустая система $\mathfrak{f} = \{A_\alpha\}$ непустых подмножеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, некоторого множества X такая, что для любых двух $A_\alpha \in \mathfrak{f}$, $A_{\alpha'} \in \mathfrak{f}$, $A_\alpha \neq A_{\alpha'}$, имеет место либо включение $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$, либо $A_{\alpha'} \subset A_\alpha$, является фильтром. Этот фильтр представляет собой упорядоченное множество, если в нем за отношение порядка $A_\alpha \dashv A_{\alpha'}$ взять включение $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$.

Определение 5. *Фильтр $\mathfrak{F}_1 = \{A\}$ на множестве X называется фильтром, который сильнее фильтра $\mathfrak{F}_2 = \{B\}$ на том же множестве, если для любого множества $B \in \mathfrak{F}_2$ существует такое $A \in \mathfrak{F}_1$, что $A \subset B$.*

Определение 6. *Если фильтр $\mathfrak{F}_1$ сильнее фильтра $\mathfrak{F}_2$, а $\mathfrak{F}_2$ сильнее $\mathfrak{F}_1$, то фильтры $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называются эквивалентными.*

Пример 8. Пусть $\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии точки x метрического пространства, состоящая из всех ее ε-окрестностей, а $\mathfrak{B}_0(x)$ — ее локальная база топологии, содержащая только окрестности радиуса $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Фильтры $\mathfrak{B}(x)$ и $\mathfrak{B}_0(x)$ эквивалентны.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что фильтры в примерах 3 и 4 эквивалентны.

Определение 7. *Фильтр $\mathfrak{F}_1$ называется подфильтром фильтра $\mathfrak{F}_2$, если каждый элемент фильтра $\mathfrak{F}_1$ является и элементом фильтра $\mathfrak{F}_2$, т. е. если $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$.*

Очевидно, что фильтр сильнее всякого своего подфильтра.

Определение 8. *Каждый подфильтр фильтра, эквивалентный самому фильтру, называется его базой.*

Например, в примере 8 фильтр $\mathfrak{B}_0(x)$ является базой фильтра $\mathfrak{B}(x)$, а натуральный фильтр F_N — базой фильтра Фреше $\mathfrak{F}_N$, построенного в примере 4.

Иногда бывает удобно рассматривать фильтры, удовлетворяющие еще одному дополнительному условию.

Определение 9. *Фильтр $\mathfrak{F}$ на множестве X называется полным, если из условий*

$$A \in \mathfrak{F},\ B \in \mathfrak{P}(X)\ \text{и}\ A \subset B$$

следует, что

$$B \in \mathfrak{F}.$$

В рассмотренных выше примерах 1, 2 и 4 фильтры являлись полными. Например, в примере 4 (фильтр Фреше) это вытекает из того, что если $A \in \mathfrak{F}_N$ и, следовательно, его дополнение в множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ конечно, то любое подмножество натуральных чисел B, которое содержит A, также имеет конечное дополнение в $\boldsymbol{N}$, так как если $A \subset B \subset \boldsymbol{N}$, то $\boldsymbol{N} \setminus B \subset \boldsymbol{N} \setminus A$.

Фильтры же, рассмотренные в примерах 3, 5 и 6, уже не являются полными. В примере 3 натуральный фильтр F_N не является полным, поскольку не всякое подмножество A множества натуральных чисел, содержащее множество вида A_n (см. (64.1)), само имеет такой вид, т. е. принадлежит натуральному фильтру F_N. Фильтры, рассмотренные в примерах 5 и 6, не являются полными, так как не всякое множество, содержащее открытое множество, является обязательно само открытым.

Иногда в математической литературе полный фильтр называется просто фильтром, а фильтр в смысле определения 4 базисом (или базой) фильтра. Это оправдано тем, что справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Всякий фильтр является базой некоторого полного фильтра.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \{A\}$ — фильтр на множестве X. Определим множество $\mathfrak{G}$, как множество всех таких подмножеств B множества X, что каждое из них имеет в качестве своего подмножества некоторый элемент фильтра $\mathfrak{F}$. Короче, $B \in \mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда существует такое $A \subset \mathfrak{F}$, что $A \subset B$. Покажем, что $\mathfrak{G}$ является полным фильтром, а фильтр $\mathfrak{F}$ — его базой.

Если $B' \in \mathfrak{G}$, $B'' \in \mathfrak{G}$, то существуют такие $A' \in \mathfrak{F}$ и $A'' \in \mathfrak{F}$, что $A' \subset B'$, $A'' \subset B''$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — фильтр, то найдется такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset A' \cap A''$. Заметив, что $A' \cap A'' \subset B' \cap B''$, получим $A \subset B' \cap B''$ и, следовательно, согласно определению $\mathfrak{G}$, множество $B' \cap B''$ является его элементом: $B' \cap B'' \in \mathfrak{G}$. Тем самым выполняется условие 1^0 определения 4.

Если бы $\varnothing \in \mathfrak{G}$, то снова, согласно определению $\mathfrak{G}$, нашлось бы такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset \varnothing$, но тогда $A = \varnothing$, т. е. пустое множество оказалось бы элементом $\mathfrak{F}$, что противоречило бы тому, что $\mathfrak{F}$ — фильтр. Следовательно, $\varnothing \notin \mathfrak{G}$. Кроме того, так как $A \subset A$, то каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ является и элементом $\mathfrak{G}$, т. е. $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, а

поскольку $\mathfrak{F}$, как всякий фильтр, не пуст: $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, то не пусто и множество $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{G} \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathfrak{G}$ удовлетворяет всем условиям определения 4, т. е. является фильтром. Его полнота тоже сразу вытекает из его определения. В самом деле, если $B \in \mathfrak{G}$, то существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset B$. Поэтому для каждого множества B' такого, что $B \subset B' \subset X$, также справедливо включение $A \subset B'$, которое и означает, что $B' \in \mathfrak{G}$.

Наконец, $\mathfrak{F}$ является базой полного фильтра $\mathfrak{G}$. Действительно, с одной стороны, как было показано, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, т. е. фильтр $\mathfrak{F}$ является подфильтром $\mathfrak{G}$; а выше отмечалось, что всякий фильтр сильнее любого своего подфильтра. С другой стороны, определение фильтра $\mathfrak{G}$ как раз и означает, что фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее фильтра $\mathfrak{G}$: каково бы ни было $B \in \mathfrak{G}$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset B$ (см. определение 5). Итак, фильтры $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ эквивалентны. □

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ — фильтр на множестве X_1, $\mathfrak{F}_2$ — фильтр на множестве X_2 и*

$$\mathfrak{F} \overset{\text{def}}{=} \{C: C = A \times B, \ \ A \in \mathfrak{F}_1, \ \ B \in \mathfrak{F}_2\}; \qquad (64.2)$$

тогда $\mathfrak{F}$ является фильтром на произведении $X_1 \times X_2$ множеств X_1 и X_2.

Фильтр $\mathfrak{F}$, определенный равенством (64.2), называется *произведением фильтров* $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Если $\mathfrak{F}$ является произведением фильтров $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, то пишется $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$.

Доказательство. Пусть $C_1 \in \mathfrak{F}$ и $C_2 \in \mathfrak{F}$, тогда, согласно определению (64.2), существуют такие $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_1$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_2$, $B_2 \in \mathfrak{F}_2$, что $C_1 = A_1 \times B_1$, а $C_2 = A_2 \times B_2$. Поскольку $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — фильтры, найдутся такие $A \in \mathfrak{F}_1$ и $B \in \mathfrak{F}_2$, что

$$A \subset A_1 \cap A_2, B \subset B_1 \cap B_2. \qquad (64.3)$$

В силу того же определения (64.2), $A \times B \in \mathfrak{F}$, причем из (64.3) следует, что

$$A \times B \subset (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2),$$

так как если $(x, y) \in A \times B$, то $x \in A$, $y \in B$. Следовательно, в силу (64.3), $x \in A_1 \cap A_2$, $y \in B_1 \cap B_2$, поэтому $(x, y) \in A_1 \times B_1$ и $(x, y) \in A_2 \times B_2$, т. е.

$$(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2).$$

Наконец, каждое $C = A \times B \neq \varnothing$, $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$, так как, в силу определения фильтра, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Из того, что $\mathfrak{F}_1 \neq \varnothing$ и $\mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$, следует, что и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ удовлетворяет определению фильтра. □

ЛЕММА 3. *Пусть X и Y — некоторые множества, $f : X \to$ $\to Y$ — отображение X в Y и $\mathfrak{F} = \{A\}$ — фильтр на множестве X. Тогда совокупность всех образов $f(A)$ множеств из фильтра $\mathfrak{F}$ является фильтром на множестве Y.*

Фильтр $\{f(A)\}$, $A \in \mathfrak{F}$, называется *образом фильтра $\mathfrak{F}$ при отображении f* и обозначается через

$$f(\mathfrak{F}) = \{f(A)\}, \quad A \in \mathfrak{F}. \tag{64.4}$$

Докажем, что $f(\mathfrak{F})$ действительно является фильтром. Пусть $f(A) \in f(\mathfrak{F})$, $f(B) \in F(\mathfrak{F})$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. Тогда существует такой элемент C фильтра $\mathfrak{F}$: $C \in \mathfrak{F}$, что $C \subset A \cap B$. Поскольку $f(C) \subset f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, и по определению системы $f(\mathfrak{F})$ имеем $f(C) \in f(\mathfrak{F})$, первое условие определения фильтра (см. определение 4) выполнено. Второе условие также выполнено, поскольку $f(\mathfrak{F})$ состоит только из элементов вида $f(A)$, где $A \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $f(A) \neq \varnothing$, поскольку $A \neq \varnothing$. Наконец, из того, что $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, следует, что и $f(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. □

64.3. Предел фильтра

Определение 10. *Пусть X — топологическое пространство, $x \in X$, и $\mathfrak{F}$ — фильтр на X. Точка x называется пределом фильтра $\mathfrak{F}$ или его предельной точкой, если фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее фильтра $\mathfrak{B}(x)$, являющегося локальной базой топологии в этой точке.*

Из определения предела фильтра следует, что $\lim \mathfrak{B}(x) = x$. Если точка x является пределом фильтра $\mathfrak{F}$, то пишут

$$x = \lim \mathfrak{F}.$$

Примеры. 1. Если множество X состоит из одной точки $x = a$, то у него имеется лишь один фильтр $\mathfrak{F}$, состоящий из одноточечного множества $\{a\}$, являющегося и локальной базой топологии в точке $x = a$, если множество X рассматривать как одноточечное топологическое простанство. Поэтому в этом случае $\lim \mathfrak{F} = a$.

2. Пусть $X = \boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, рассматриваемое, как обычно, с дискретной топологией: каждая точка $n \in \boldsymbol{N}$ считается открытым множеством (иначе говоря, каждая точка является изолированной точкой); тогда натуральный фильтр F_N (см. пример 3 в п. 64.2) не имеет предела в $\boldsymbol{N}$.

Действительно, никакое число $n \in \boldsymbol{N}$ не является пределом фильтра F_N, ибо у любого числа $n_0 \in \boldsymbol{N}$ существует локальная база топологии, состоящая только из этого числа n_0, и не существует $A \in F_N$, содержащегося в одноточечном множестве $\{n_0\}$, поскольку любое $A \in F_N$ содержит бесконечно много элементов. Таким образом, фильтр F_N не сильнее локальной базы топологии любого числа $n_0 \in \boldsymbol{N}$.

3. Пусть $X = \boldsymbol{N} \cup \{+\infty\}$, т. е. множество X получено добавлением к множеству натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ «бесконечно удаленной точки» $+\infty$, причем локальная база топологии $\mathfrak{B}(+\infty)$ состоит из всевозможных множеств A_n (см. (64.1)), а локальные базы $\mathfrak{B}(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, по-прежнему из одной точки n. База топологии в X определяется как объединение локальных баз всех его точек.

В пространстве $\boldsymbol{N} \cup \{+\infty\}$ натуральный фильтр F_N имеет своим пределом $+\infty$. Действительно, для любой окрестности $A_n \in \mathfrak{B}(+\infty)$ в качестве элемента $A \in F_N$ такого, что $A \subset A_n$ (см. определение 10), можно взять само A_n, так как $A_n \in F_N$.

Задача 11. Доказать, что для того чтобы любой фильтр топологического пространства имел не более одного предела, необходимо и достаточно, чтобы пространство было хаусдорфовым.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы точка x являлась пределом фильтра $\mathfrak{F}$ топологического пространства X, необходимо, чтобы эта точка являлась пределом каждой базы этого фильтра, и достаточно, чтобы она являлась пределом по крайней мере одной его базы.*

Доказательство необходимости. Пусть подфильтр $\mathfrak{F}_0$ является базой фильтра $\mathfrak{F}$ пространства X и

$$x = \lim \mathfrak{F},$$

т. е. фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$ в точке x. Это означает, что для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}(x)$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset U$. Поскольку $\mathfrak{F}_0$ является базой фильтра $\mathfrak{F}$, то для указанного $A \in \mathfrak{F}$ найдется такое $B \in \mathfrak{F}_0$, что $B \subset A$ и, следовательно, $B \subset U$, т. е. подфильтр $\mathfrak{F}_0$ также сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$, и потому $x = \lim \mathfrak{F}_0$.

Доказательство достаточности. Пусть подфильтр $\mathfrak{F}_0$ фильтра $\mathfrak{F}$ является его базой и $x = \lim \mathfrak{F}_0$, т. е. $\mathfrak{F}_0$ сильнее локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x)$, тогда сам фильтр тем более сильнее $\mathfrak{B}(x)$, ибо каждый элемент подфильтра является и элементом фильтра. Следовательно, $x = \lim \mathfrak{F}$. □

64.4. Предел отображения по фильтру

Общее понятие предела дается следующим определением.

Определение 11. *Пусть X — некоторое множество, Y — топологическое пространство, f: $X \to Y$ — отображение X в Y, $\mathfrak{F}$ — фильтр на X.*

Точку $b \in Y$ называют пределом отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$ и пишут

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = b,$$

если фильтр $f(\mathfrak{F})$ имеет своим пределом в пространстве Y точку b.

Таким образом,

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim f(\mathfrak{F}). \tag{64.5}$$

Примеры. 1. Пусть $X = N$ — множество натуральных чисел, Y — топологическое пространство, f: $N \to Y$, $y_n \overset{\text{def}}{=} f(n)$, $n \in N$, и пусть F_N — натуральный фильтр, построенный в примере 3 в п. 64.2, т. е. F_N состоит из множеств (64.1). Тогда предел отображения f по фильтру F_N совпадает с обычным пределом последовательности $\{y_n\}$ в Y. Действительно, условие $\lim_{F_N} f(n) = b$ равносильно, согласно (64.5), условию $\lim f(F_N) = b$, где $f(F_N) = \{f(A_n)\}$, $f(A_n) = \{y_m : m > n\}$. Равенство предела фильтра $f(F_N)$ точке b означает, что для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}(b)$, где $\mathfrak{B}(b)$ — локальная база топологии в точке b, существует содержащийся в U элемент $f(A_{n_0})$ фильтра $f(F_N) : f(A_{n_0}) \subset U$. Поскольку при $n > n_0$ выполняется включение $n \in A_{n_0}$, а следовательно, и включение $y_n = f(n) \in f(A_{n_0})$, то при $n > n_0$ имеет место включение $y_n \in U$. Это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$.

2. Пусть $X = N \times N$, F_N — натуральный фильтр, $\mathfrak{F} = F_N \times F_N$ (см. (64.2)), Y — топологическое пространство, $f : N \times N \to Y$, $y_{mn} \overset{\text{def}}{=} f(m, n)$, $m \in N$, $n \in N$; тогда предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(m, n)$ совпадает с обычным пределам двойной последовательности

$\{y_{mn}\}$: точка b называется пределом $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} y_{mn}$ последовательности $\{y_{mn}\}$, если для любой окрестности U точки b существуют такие m_0 и n_0, что при $m > n_0$ и $n > n_0$ выполняется включение $y_{mn} \in U$. Таким образом,

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(m, n) = \lim_{m,n\to\infty} y_{mn}.$$

3. Если система $\mathfrak{F} = \{A_\alpha\}$, $A_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathfrak{B}$, является направлением (см. пример 7 в п. 64.2), а Y — метрическое пространство, то существование предела $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = b$ отображения $f : X \to Y$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A_\alpha \in \mathfrak{F}$, что для всех $x \in A_\alpha$ выполняется неравенство $\rho(f(x), b) < \varepsilon$.

В этом случае предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ называют также *пределом по направлению*.

4. Пусть E — измеримое по Жордану множество в $\boldsymbol{R}^n$, τ — какое-либо его разбиение: $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$, $\xi_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть элементами множества X являются всевозможные множества вида

$$x = \{\tau, \xi_1, \ldots, \xi_k\}. \tag{64.6}$$

Для любого $\eta > 0$ обозначим через A_η подмножество множества X, состоящее из всех таких элементов x, у которых мелкости $|\tau|$ входящих в них разбиений τ меньше η, т. е. $|\tau| < \eta$.

Система $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ является фильтром на X. Более того, система представляет собой направление, если в ней за отношение порядка $A_{\eta_1} \dashv A_{\eta_2}$ взять включение $A_{\eta_1} \subset A_{\eta_2}$.

Всякая действительная функция $f : E \to \boldsymbol{R}$ порождает отображение $\varphi_f : X \to \boldsymbol{R}$ по формуле

$$\varphi_f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\mu E_j, \quad x = \{\tau, \xi_1, \ldots, \xi_k\}.$$

Таким образом, $\varphi_f(x)$ является значением соответствующей интегральной суммы Римана функции f.

Предел отображения $\varphi_f : X \to \boldsymbol{R}$ по фильтру $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ совпадает с обычным пределом интегральных сумм Римана функции f при условии, что мелкости рассматриваемых разбиений стремятся к нулю

$$\lim_{\mathfrak{F}} \varphi_f(x) = \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\mu E_i.$$

Очевидно, что этот предел является пределом по направлению.

5. Пусть Y и Z — топологические пространства, $X \subset Z$, $f : X \to Y$, $a \in Z$, $\mathfrak{F}_0$ — такой фильтр на топологическом пространстве Z, что $\lim \mathfrak{F}_0 = a$ (т. е. фильтр $\mathfrak{F}_0$ сильнее некоторой локальной базы топологии $\mathfrak{B}(a)$ в пространстве Z в точке a).

Если $z = a$ — точка прикосновения множества X и фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из всевозможных пересечений множеств, входящих в фильтр $\mathfrak{F}_0$ с множеством X:

$$\mathfrak{F} = \{A : \exists\, A_0 \in \mathfrak{F}_0, A = A_0 \cap X\},$$

то предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ называется *пределом отображения f по фильтру* $\mathfrak{F}$ *в точке a*.

Если $a \in X$ и $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = f(a)$, то отображение называется непрерывным по фильтру f в точке $x = a$. Если точка $x = a$ множества X является его изолированной точкой, то в качестве фильтров $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}$ можно взять одноточечное множества $\{a\}$: $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} = \{a\}$. В этом случае фильтр $f(\mathfrak{F})$ также состоит из одноточечного множества $\{f(a)\}$. Поэтому (см. пример 1 в п. 64.3) $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = \lim_{f}(\mathfrak{F}) = f(a)$, и значит, отображение f непрерывно в точке $x = a$.

Если f — отображение подмножества X некоторого евклидова пространства $Z = \boldsymbol{R}^n$ в евклидово пространство $Y = \boldsymbol{R}^m$, a — точка прикосновения множества X и фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из пересечения всевозможных окрестностей некоторой локальной базы топологии точки a в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ с множеством X, то определение $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ равносильно определению предела отображения, сформулированному в § 36. При этом, если $a \notin X$ (и, следовательно, точка a, будучи точкой прикосновения множества X, является его предельной точкой), то предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ является пределом по фильтру, состоящему из пересечений всевозможных окрестностей точки a в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ с множеством X. Если же $a \in X$, то $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, т. е. отображение f является непрерывным в точке $x = a$ по фильтру $\mathfrak{F}$.

Если X и Y — подмножества соответственно метрических пространств X' и Y', $a \in X'$, $b \in Y'$, то существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, означает существование предела функции по направлению $\mathfrak{F}$ состоящему из пересечений множества X со всевозможными δ-окрестностями точки $x = a$ (см. пример 3). Это равносильно тому, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X \cap U(a; \delta)$ выполняются неравенства $\rho\,(f(x), b) < \varepsilon$.

Заметим, что раньше символ $x \to a$, $x \in E$ не имел для нас самостоятельного смысла: было определено лишь все обозначение $\lim\limits_{x \to a,\, x \in E} f(x)$ в целом. Теперь, в конце курса, мы видим, что символ $x \to a$, $x \in E$, можно рассматривать как обозначение фильтра (например, фильтра $\overset{\circ}{\mathfrak{B}}(a)$ или фильтра $\mathfrak{B}(a)$), по которому берется предел отображения.

Итак, действительно все встретившиеся нам раньше понятия предела являются частным случаем предела отображения по фильтру.

Для отображений в полное метрическое пространство, в частности для всех функций, принимающих числовые значения, имеется критерий существования предела по фильтру, формулируемый в терминах самого фильтра, без использования значения самого предела, т. е. критерий, обобщающий разнообразные критерии Коши, встречавшиеся нам раньше.

Определение 12. *Фильтр в метрическом пространстве называется фильтром Коши, если он содержит сколь угодно малые по диаметру множества.*

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы отображение $f : X \to Y$ произвольного множества X в полное метрическое пространство Y имело предел по некоторому фильтру $\mathfrak{F}$ множества X, необходимо и достаточно, чтобы образ $f(\mathfrak{F})$ фильтра $\mathfrak{F}$ при отображении f был фильтром Коши в пространстве Y.*

Доказательство. Необходимость. Если существует предел $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = b$, то, согласно определению 10, для любой ε-окрестности $U(b, \varepsilon)$ точки $b \in Y$ существует такое множество $A \in \mathfrak{F}$, что $f(A) \subset U(b, \varepsilon)$ и, следовательно, $\operatorname{diam} f(A) \leqslant 2\varepsilon$. Это и означает, что фильтр $f(\mathfrak{F})$ содержит сколь угодно малые по диаметру множества, т. е. является фильтром Коши.

Достаточность. Пусть фильтр $f(\mathfrak{F})$ является фильтром Коши. Выберем какое-либо множество $A_1 \in \mathfrak{F}$ так, чтобы $\operatorname{diam} f(A_1) < 1$, а затем множество $B_1 \in \mathfrak{F}$ так, чтобы $\operatorname{diam} f(B_1) <$ $< 1/2$. Согласно определению фильтра, существует такое множество $AA_2 \in \mathfrak{F}$, что $A_2 \subset A_1$ и $A_2 \subset B_1$, следовательно, $\operatorname{diam} A_2 <$ $< 1/2$.

Если выбраны множества $A_k \in \mathfrak{F}$ так, что $\operatorname{diam} f(A_k) < 1/k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n,$$

то найдется множество $B_n \subset \mathfrak{F}$, для которого $\operatorname{diam} f(B_n) <$ $< \frac{1}{n+1}$, а затем и такое множество $A_{n+1} \in \mathfrak{F}$, что

$$A_{n+1} \subset A_n,\ A_{n+1} \subset B_n,$$

следовательно,

$$\operatorname{diam} f(A_{n+1}) < \frac{1}{n+1}.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность таких множеств $A_n \in \mathfrak{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, что для нее будут выполняться следующие условия:

1) $f(A_n) \neq \varnothing$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) $f(A_1) \supset f(A_2) \supset \ldots \supset f(A_n) \supset \ldots$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam} f(A_n) = 0$.

Это означает, что последовательность множеств $f(A_n)$, $n =$ $= 1, 2, \ldots$, метрического пространства Y является последовательностью Коши.

В силу полноты пространства Y, согласно следствию теоремы 1 п. 57.2, существует точка $b \in Y$, являющаяся точкой прикосновения для всех множеств $f(A_n)$. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу выполнения условия 3, существует такое n_0, что имеет место неравенство

$$\operatorname{diam} f(A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (64.7)$$

Так как точка b является точкой прикосновения множества $f(A_{n_0})$, то найдется такая точка $y \in f(A_{n_0})$, что

$$\rho(b, y) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (64.8)$$

Из неравенств (64.7) и (64.8) следует, что для любой точки $z \in f(A_{n_0})$ выполняется неравенство

$$\rho(z, b) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, b) \underset{(64.8)}{<} \operatorname{diam} f(A_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{2} \underset{(64.7)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $f(A_{n_0}) \subset U(b, \varepsilon)$.

Таким образом, в любой окрестности точки b имеется элемент фильтра $f(\mathfrak{F})$, т. е., согласно определениям 10 и 11,

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = b. \ \square$$

В заключение отметим, что на пределы по фильтру отображений в числовые множества очевидным образом обобщаются свойства классических конечных пределов функций, например возможность предельного перехода в неравенствах, и свойства, связанные с арифметическими свойствами над функциями.

ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ — функции $f(x)$ сопоставляется ее ряд Фурье

$\operatorname{supp} f$ — носитель функции

$\chi(x)$, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E

v. p. — главное значение

$F[f]$, $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f

$F^{-1}[f]$ — обратное преобразование Фурье функции f

$\varphi*\psi$, $(\varphi*\psi)(x)$ — свертка функций φ и ψ

δ_j^i — символ Кронекера

$P_n(x)$ — многочлены Лежандра

$T_n(x)$ — многочлены Чебышёва

$\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y метрического пространства

$\|x\|$; $\|x\|_X$, $x \in X$ — полунорма, норма

$X + Y$ — алгебраическая сумма подмножеств X и Y линейного пространства

$X \oplus Y$ — прямая сумма линейных пространств X и Y

$X \times Y$ — произведение линейных (нормированных) пространств X и Y

$\ker f$ — ядро отображения f

Ax, $A(x)$, A — линейный оператор

$x \perp y$ — элементы x и y ортогональны

$x \perp Y$ — элемент $x \in X$ ортогонален подпространству $Y \subset X$

$Y^{\perp}$ — ортогональное дополнение множества Y

$X \Subset Y$ — вложение пространства X в пространство Y

$X \hookrightarrow Y$ — линейные пространства со сходимостью X и Y, $X \subset Y$, обладают тем свойством, что всякая последовательность $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся в X к элементу x, сходится к x и в Y

$Df(x)$, $(Df)(x)$ — производная Фреше

$D_h f(x)$, $(D_h f)(x)$ — производная Гато по направлению h

$(D_{\text{сл}} f(x))$, $D_{\text{сл.}} f(x)(h)$ — слабый дифференциал

$\mathfrak{L}(X, Y)$ — множество линейных операторов, отображающих линейное пространство X в линейное пространство Y

$\mathscr{L}(X, Y)$ — множество ограниченных линейных операторов, отображающих линейное пространство X в линейное пространство Y

$\mathscr{L}(x_1, \dots, x_n)$ — линейная оболочка элементов $x_1, \dots, x_n$

$\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ — линейное нормированное пространство ограниченных билинейных отображений $f\colon X \times Y \to Z$

$\mathscr{L}_n(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$ — линейное нормированное пространство ограниченных мультилинейных отображений $f\colon X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Y$

C^n — n-мерное комплексное арифметическое пространство

l_2 — гильбертово пространство последовательностей $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$$

l_p, $1 \leqslant p < +\infty$ — банахово пространство последовательностей $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p < +\infty,\ x_n \geqslant 0$$

$\mathscr{P}^n$ — линейное пространство, состоящее из множества всех многочленов, степень которых не превышает n, дополненного нулевым многочленом

$F(E)$ — линейное пространство функций, заданных на множестве E

$B(E)$ — пространство функций, ограниченных на множестве E

$C(X)$ — пространство функций, ограниченных и непрерывных на метрическом пространстве X

$C\,[a, b]$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$

RL_p — пространство функций с интегрируемой p-й степенью модуля, $1 \leqslant p < +\infty$,

CL_p — пространство непрерывных функций с нормой пространства RL_p, $1 \leqslant p < +\infty$

$\widetilde{RL}_p$ — пространство, получающееся из RL_p его факторизацией по множеству функций с нулевой полунормой $\|f\|_{RL_p}$, $1 \leqslant p < +\infty$ эквивалентных функций

L_p — лебегово пространство, получающееся пополнением пространства $\widetilde{RL}_p$

D — пространство основных бесконечно дифференцируемых финитных функций

S — пространство основных бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со своими производными стремятся к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени $1/x$

D' — пространство обобщенных функций над пространством D основных функций

S' — пространство обобщенных функций над пространством S основных функций

(f, x) — значение функционала f в точке x

$\mathfrak{B}$ — база топологии

$\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии в точке x

$\mathfrak{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X

$\mathfrak{F}$ — фильтр

$\lim_{\mathfrak{F}}$ — предел фильтра

$\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ — предел отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 8

Функциональные пространства

Дополнение